בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ 2011)
מספרי הקורס: 88211
המרצה: מיכאל מגרל
המתרגלים: לואי פולב ודורון פרלמן
מועד ב'
חומר עזר: רק מחשבון רגיל
משך המבחן: שעתיים וחצי

יש לפתור בדיוק 4 מתוך 5 שאלות (כל שאלה שווה 25 נקודות)
בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.

השאלות:

1. א. הוכיחו שכל חבורה G עם $|G|=p^n$ איברים (p ראשוני) תמיד פתירה.

ב. (תירגול 7) תהא G חבורה מסדר p^2q עבור p,q ראשוניים. הוכיחו ש- G לא פשוטה.

<u>פתרון:</u>

אם $r_p=1$ או $r_q=1$ אז סיימנו. אחרת נניח $r_q\in\{p,p^2\}$ $\wedge$ $r_p=q$.

אם Q היא תת חבורה q-סילו אזי היא ציקלית וכל איבר ב- $Q\setminus\{e\}$ יוצר אותה. לכן יש ב- G $r_q(q-1)$ איברים מסדר q.

אם $r_q=p^2$ אזי יש $p^2(q-1)$ איברים מסדר q. מכיוון שיש ב- G p^2q איברים, נקבל שנותרו רק p^2 איברים שאיחודם הוא תת חבורה מסדר p^2.

[הסבר למשפט האחרון: $p^2\,||G|$ ולכן יש תת חבורה מסדר p^2 שבה כל האיברים הם מסדר שמחלק את p. יש $p^2(q-1)$ איברים מסדר q. q לא מחלק את p ולכן ה- p^2 איברים האלה זה מה שנותר].

זאת אומרת, יש תת חבורה יחידה מסדר p^2 והיא תת חבורה p-סילו ולכן $r_p=1$, בסתירה להנחה הראשונית.

לכן $r_q=p$ וגם $r_p=q$ ולכן $q\equiv 1(\bmod p)$ $\wedge$ $p\equiv 1(\bmod q)$ וזאת סתירה, כי אם למשל $p<q$ (בה"כ) אזי $p\equiv p(\bmod q)\not\equiv 1(\bmod q)$.

ג. הוכיחו ש G/H אבלית אם"ם $G'\subseteq H$.

2. א. הוכיחו את משפט Lagrange.

ב. הוכיחו שאם $f:X\to Y$ אפימורפיזם של חבורות סופיות אזי $|Y|$ מחלק את $|X|$.

ג.(תירגול 5) הוכיחו שבחבורה A_4 לא קיימת ת"ח עם 6 איברים.

<u>פתרון:</u>

נתבונן ב- A_4. מתקיים $|A_4|=12$. כמו כן 6 מחלק את 12, ונראה שאין ל- A_4 תת חבורה מסדר 6.

נניח בשלילה שקיימת $H \le A_4$ כך ש- $|H|=6$. אזי $\left[A_4 : H\right]=2$. לכן, לפי תרגיל משיעור קודם,

האיברים ב- A_4 הם מהצורה $(---)$ או $(--)(--)$ ולכן הסדרים האפשריים הם 1,2,3.

לכל $\sigma \in A_4$ מתקיים $\sigma^2 \in H$. יהי $\sigma \in A_4$ מחזור מאורך 3. אזי $\sigma^2 \in H$ וכן

$\sigma^2\sigma^2=\sigma^4=\sigma \in H$. כל המחזורים מאורך 3 נמצאים ב- A_4 ועכשיו ראינו שהם נמצאים גם

ב- H. מספר המחזורים מאורך 3 ב- הוא: $\binom{4}{3}2!=8$. זאת אומרת שיש ב- H לפחות 8

איברים, וזו סתירה להנחה $|H|=6$.

3. א. נניח G חבורה מסדר p^2 כאשר p ראשוני. הוכיחו ש- G אבלית ומתקיים $|Aut(G)|> p^2-2p$.

פתרון: (אבליות) ל G יש מרכז לא טריוויאלי. בה"כ $H=<h>$ עם p אלמנטים.

$G/H=<[a]>$ ציקלית. כל איבר ב G ניתן להציג כ a^ih^j. הם מחלפים ...

בה"כ $G=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$. מספר אוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_p$ שווה $p-1$. לכן מספר אוטומורפיזמים ב $G=\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ לפחות $(p-1)^2$ ...

ב. הוכיחו או הפריכו: $\mathbb{C}^*/T\cong\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}/\mathbb{Q}\cong T/\Omega_\infty$

(כאשר $T:=\{z\in C \mid \ \|z\|=1\}$ ו Ω_∞ חבורה של כל שורשי יחידה).

ג. עבור החבורה $G:=U_{10}\times\mathbb{Z}_{35}$ תארו תמונות אפימורפיות ומצאו $|Aut(G)|$.

4. (שיעורי בית 3 שאלה 10 סעיף ד)

א. נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\left\{\sigma\in S_6 : \sigma(2)=2, \sigma(4)=4, \sigma(6)=6\right\}$.

הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3.

ב. האם היא תת חבורה נורמלית?

ג. הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות K,L – כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L\cap K=\{id\}$.

5. א. הוכיחו את משפט Burnside.

ב. מצאו את מספר הלוחות 4×4 הלא שקולים עד כדי סיבובים אם מותר לצבוע ב 3 צבעים קבועים.

ג. הוכיחו שכל פעולה $G\times X\to X$ עם מסלול אחד איזומורפית לפעולה מהטיפוס $G\times G/H\to G/H,\quad (g,tH)\mapsto(gt)H$.

שאלת הבונוס: (5 נקודות)

נניח S_p חבורה סימטרית כאשר p ראשוני.

א. מצאו כמה ת"ח מסדר p קיימות ב S_p.

תשובה: $(p-2)!$

פתרון:

מספר אברים ב S_p בעלי סדר p שווה למספר עגילים אורך p ז"א $p!/\mathrm{p}=(\mathrm{p}-1)!$.

הם כולם נמצאים בתתי חבורות מסדר p שמספרן שווה ל n_p. יש בדויוק $p-1$ כאלה בכל תת חבורה כזאת. לכן $(p-1)!=n_p(p-1)$

מכאן $n_p=(p-2)!$

ב. באמצעות (א) הוכיחו $p\,|\,(p-1)!+1$ (משפט Wilson).

בגלל (א) ומשפט סילו 3 נקבל $(p-2)!\equiv 1 \bmod p$ ומכאן נובע משפט ווילסון $(p-1)!\equiv p-1 \bmod p$.

בהצלחה ושנה טובה ! ☺