

תרגול 10 – אנליזה מודרנית 1

תזכורת: (משפט פוביני-טונלי): יהיו (X, S, μ) ו (Y, G, ν) יהיו σ - סופיות, ותהי f פונקציה מ $X \times Y$ ל $[0, \infty]$ מדידה $S \times G$ או $f \in L^1(X \times Y, S \times G, \mu \times \nu)$. אזי

$$\int f d\mu \times d\nu = \iint f(x, y) d\mu(x) d\nu(y) = \iint f(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$$

כלומר, ניתן להחליף סדר אינטגרציה.

1. תרגיל ("כשלון חרוץ" של משפטי פוביני וטונלי):

יהיו הממ"חים $([0,1], L([0,1]), u)$, $([0,1], P([0,1]), \nu)$ כאשר $u = m$ היא מידת לבג ו- $\nu = \#$ היא מידת הספירה, ותהי $w = u \times \nu = m \times \#$ מידת המכפלה של u, ν . נגדיר את האלכסון $D = \{(x, y) : 0 \leq x = y \leq 1\}$

א. הוכיחו כי האלכסון D הוא מדיד במרחב המכפלה.

ב. הוכיחו כי המספרים

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} I_D(x, y) dw, \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} I_D(x, y) dm(x) d\#(y), \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} I_D(x, y) d\#(y) dm(x)$$

זה מזה.

פתרון:

קודם כל יש להבין מהו מלבן מדיד במרחב המדובר. התשובה היא קבוצה מהצורה $R = E \times F$ כאשר $E \subseteq [0,1]$ מדידה לבג ו- $F \subseteq [0,1]$ כלשהי. למשל $R = \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right\}$ הוא מלבן

$$|R| = m\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) \cdot \#\left(\left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}\right\}\right) = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

מיד, ונפחו הוא $\frac{3}{4}$

א. עבור $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ נגדיר קטעים $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$. נגדיר בנוסף $B_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} \times I_{n,k}$.

כל n , B_n הוא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים (R_σ) , ופשוט לראות כי $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ [ניתן]

לצייר ציור, זה נראה כמו פיקסלים]. כלומר D מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ ולכן מדידה.

ב. כדי לחשב את המידה $w(D)$ נזכר במידה החיצונית:

$$w^*(D) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| : D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, R_n \text{ are measurable rectangles} \right\}$$

יהי $\{R_n = E_n \times F_n\}_{n=1}^{\infty}$ כיסוי של D ע"י מלבנים מדידים, ז"א $D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \times F_n$. נזרוק מהאוסף

$\{R_n\}$ את כל המלבנים המדידים עבורם $m(E_n) = 0$. נותר לנו כיסוי של חלק לא בן-מניה של

האלכסון, $D' \subseteq \bigcup_{\substack{n=1 \\ m(E_n) > 0}}^{\infty} E_n \times F_n$. הסיבה לכך היא שקבוצת שיעורי ה- x של המלבנים שהוסרו היא

ממידת לבג אפס, ולכן המלבנים שנותרו מכסים תת-קבוצה של האלכסון, ששיעורי ה- x שלה מהווים קבוצה ממידת לבג חיובית (ומכאן לא בת מניה).

בהכרח ישנו מלבן $R_{n_0} = E_{n_0} \times F_{n_0}$ באוסף הנותר, עבורו F_{n_0} אינסופית (אחרת המלבנים שנותרו לא יכולים לכסות את D' , שקבוצת שיעורי ה- y שלה אינה בת מניה). עבור אותו המלבן

$|R_{n_0}| = m(E_{n_0}) \cdot \#(F_{n_0}) = \infty$ ומכאן $\sum_{n=1}^{\infty} |R_n| \geq |R_{n_0}| = \infty$. כלומר, כל האיברים בקבוצה

$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |R_n| : D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, R_n \text{ are measurable rectangles} \right\}$ הם ∞ ולכן $w^*(D)$ שהוא ה- \sup שלה

שווה אינסוף. מכאן ניתן לחשב את האינטגרל הראשון (הכפול):

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} I_D(x, y) d\omega = w(D) = \infty$$

לגבי האינטגרלים הנשנים:

• לכל $y \in [0,1]$ קבוע, $\int_{[0,1]} I_D(x, y) dm(x) = 0$ (כי $I_D = 0$ כב"מ dm) ולכן

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} I_D(x, y) dm(x) d\#(y) = 0$$

• לכל $x \in [0,1]$ קבוע

$$\int_{[0,1]} I_D(x, y) d\#(y) = \int_{\{x\}} I_D(x, y) d\#(y) + \int_{[0,1] \setminus \{x\}} I_D(x, y) d\#(y) = \int_{\{x\}} 1 \cdot d\#(y) + 0 = \#(\{1\}) = 1$$

$$\cdot \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} I_D(x, y) d\#(y) d\#(x) = \int_{[0,1]} 1 \cdot dm(x) = 1 \text{ ולכן}$$

2. תרגיל: תהי $f : (\mathbb{R}, L(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{R}^*$ מדידה לבג, הוכיחו את השוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x) = \int_0^{\infty} m(\{x : |f(x)| \geq t\}) dm(t)$$

פתרון:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{|f(x)|} 1 dm(t) \right] dm(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} I_{\{(x,t): |f(x)| \geq t\}} dm(t) \right] dm(x) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): |f(x)| \geq t\}} dm(x) \right] dm(t) = \int_0^{\infty} m(\{x : |f(x)| \geq t\}) dm(t)$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג $dm(x), dm(t)$ שהן שלמות ו- σ סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t): |f(x)| \geq t\}}$ מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי **הקבוצה** $\{(x,t) : |f(x)| \geq t\}$ מדידה " $L \otimes L$ ".

(נשתמש בסימון \otimes לסמן את σ -אלגברת המכפלה)

ובכן יהי $\alpha \in \mathbb{R}$, ההעתקה $x \mapsto |f(x)|$ מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \alpha\} =: E_\alpha \in L$ ומכאן $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : |f(x)| > \alpha\} = E_\alpha \times \mathbb{R} \in L \otimes L$ מלבן מדיד (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה $(x,t) \mapsto |f(x)|$ מדידה $L \otimes L$.

הפונקציה $t \mapsto t$ גם כן מדידה לבג ולכן $\{t \in \mathbb{R} : t > \alpha\} =: F_\alpha \in L$, ומכאן $\{(x,t) : t > \alpha\} = \mathbb{R} \times F_\alpha \in L \otimes L$. הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $(|f| - t)^{-1}[[0, \infty))$ מדידה.

3. תרגיל: תהי μ מידה סופית על \mathbb{R} , וגדיר $\alpha(x) = \mu((-\infty, x])$. הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x+c) - \alpha(x)] dm(x) = c\mu(\mathbb{R})$$

פתרון:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x+c) - \alpha(x)] dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mu((-\infty, x+c]) - \mu((-\infty, x])] dm(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu((x, x+c]) dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(x, x+c]} d\mu(t) dm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): x < t \leq x+c\}} d\mu(t) dm(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): t > x \geq t-c\}} d\mu(t) dm(x) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): t > x \geq t-c\}} dm(x) d\mu(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(t) = c\mu(\mathbb{R})$$

4. חשבו את האינטגרלים $\int(\int f dx) dy$, $\int(\int f dy) dx$ ו $\iint f dx \times dy$ עבור הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \text{ על } [0,1] \times [0,1].$$

$$\text{פתרון: נחשב את } \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{y}{2(x^2 + y^2)} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2(1+y^2)y} dy$$

קל לראות כי מתבדר שכן יש לו סינגולריות של $O(y^{-1})$ סביב 0. מטעמי סמטריה נקבל

גם את $\int(\int f dy) dx$. עבור האינטגרל האחרון נעבור לקורדינטות פולאריות, נשתמש

במשפט טונלי ובמשפט ההתכנסות המונוטונית ונקבל

$$\begin{aligned} \iint \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \times dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^4} r 1_{\{(r, \theta) \in \varepsilon, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]\}} dr d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{r} dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty \end{aligned}$$