# תורת הקבוצות תרגיל בית 6

1. הוכיחו: לכל סודר $\alpha$, $1^\alpha = 1$.
הוכחה: באינדוקציה טרנספיניטית.
עבור $\alpha = 0$: $1^0 = 1$, מהגדרה.
נניח נכונות ל$\beta$. נוכיח ל$\beta + 1$.
$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha = 1 \cdot 1 = 1$.
יהי $\beta$ סודר גבולי, ונניח נכונות לכל $\gamma < \beta$.
$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < 1\} = \sup\{1\} = 1$

2. יהיו $\alpha, \beta, \gamma$ סודרים, כך ש$\alpha \neq 0$. הוכיחו: $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.
פתרון:
נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית על $\gamma$.
עבור $\gamma = 0$: $\alpha^{\beta \cdot 0} = \alpha^0 = 1$.
$(\alpha^\beta)^0 = 1$.
נניח נכונות ל$\gamma$. נוכיח ל$\gamma + 1$.
$\alpha^{\beta(\gamma+1)} = \alpha^{\beta\gamma+\beta} = \alpha^{\beta\gamma}\alpha^\beta = (\alpha^\beta)^\gamma \alpha^\beta = (\alpha^\beta)^{\gamma+1}$.
כעת, תהי $\gamma$ גבולי, ונניח נכונות לכל $\delta < \gamma$.
$\alpha^{\beta\gamma} = \sup\{\alpha^{\beta\delta} : \delta < \beta\} = \{(\alpha^\beta)^\delta : \delta < \gamma\} = (\alpha^\beta)^\gamma$.

3.א. יהי $\beta$ סודר, ו$0 \neq \alpha_1 \leq \alpha_2$. הוכיחו:
$\alpha_1^\beta \leq \alpha_2^\beta$.
ב. הסיקו: אם $0 \neq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ו$\beta_1 \leq \beta_2$ אז $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^\beta$.
פתרון:
א. נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית על $\beta$.
עבור $\beta = 0$: $\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = 1$.
נניח נכונות ל$\beta$. נוכיח ל$\beta + 1$.
$\alpha_1^{\beta+1} = \alpha_1^\beta \alpha_1 \leq \alpha_2^\beta \alpha_2 = \alpha_2^{\beta+1}$.
(שימו לב: אנחנו מסתמכים על תכונות שהוכחנו עבור כפל).
נניח ש$\beta$ גבולי, והטענה נכונה לכל $\gamma < \beta$.
$\alpha_1^\beta = \sup\{\alpha_1^\gamma : \gamma < \beta\} \leq \sup\{\alpha_2^\gamma : \gamma < \beta\} = \alpha_2^\beta$.
ב. $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$ (האי־שוויון השני הוא מטענה שהוכחתם בהרצאה)

4. הוכיחו: אם $\alpha = \beta\gamma_1 + \delta_1 = \beta\gamma_2 + \delta_2$ כך ש$\forall i, \delta_i < \beta_i$ , אז $\gamma_1 = \gamma_2, \delta_1 = \delta_2$.
(שימו לב: זאת בדיוק היחידות שבמשפט החילוק עם שארית).
פתרון:
ראשית, נניח $\gamma_1 = \gamma_2$. מהגדרת החיסור, נקבל ש$\delta_1 = \delta_2$. (הוכחנו בעבר שאם $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ אז $\alpha = \gamma$.

כעת, נניח בשלילה ש$\gamma_2 \neq \gamma_1$.
נניח בה"כ ש $\gamma_2 > \gamma_1$. אז $\gamma_2 = \gamma_1 + \epsilon$ עבור $\epsilon > 0$.
$\beta\gamma_1 + \delta_1 = \beta(\gamma_1 + \epsilon) + \delta_2 = \beta\gamma_1 + \beta\epsilon + \delta_2$.
נובע מכך ש $\delta_1 = \beta\epsilon + \delta_2$. כלומר, $\beta \leq \delta_1$. סתירה.

5. חשבו: (כלומר, מהי שארית החלוקה)
א. $(\omega + \omega) \mod 5$
ב. $\omega^2 \mod (\omega + 2)$
פתרון:
א. טענה: $\omega + \omega = 5(\omega + \omega)$.
הסבר: $5(\omega + \omega) = 5\omega + 5\omega = \omega + \omega$.
לכן השארית היא 0 .
ב. טענה: $\omega^2 = (\omega + 2)\omega$.
הוכחה: $\omega$ גבולי, ולכן:
$$(\omega + 2)\omega = (\omega + 2)\sup\{n : n < \omega\} = \sup\{(\omega + 2)n : n < \omega\} = \sup\{\omega n + 2 : n < \omega\} = \sup\{\omega n : n < \omega\} = \omega \sup\{n : n < \omega\} = \omega \cdot \omega = \omega^2$$
מסקנה: $\omega^2 \mod (\omega + 2) = 0$

6. הפריכו את הטענה הבאה:
לכל סודרים $\alpha, \beta$ קיימים $\gamma, \delta$ יחידים כך ש $\alpha = \gamma\beta + \delta$, ו$\delta < \beta$
נקח $\alpha = \beta = \omega$.
אזי, $\alpha = 1 \cdot \omega + 0 = 2 \cdot \omega + 0$.