בס"ד
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מספר הקורס : 83-115-01
מרצה : דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'
סמסטר ב', מועד ב' : ז אלול התשעד (2.09.2014)
<u>משך הבחינה : שלוש שעות</u>

<u>חומר עזר : 3 דפים חד-צדדיים של A4 , מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)</u>

<u>ניקוד : במבחן אפשר לצבור 115 נקודות.</u>

<u>יש לפרט שלבי החישוב. נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.</u>

בהצלחה!

שאלה 1. (16 נקודות)

א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$ בדרך כלשהי, לפי בחירתכם. חפשו פתרונות המשוואה המקיימים את תנאי ההתחלה $y(1)=0$;

ב. הציעו עוד שיטה לפתרון של המשוואה מהסעיף הקודם והסבירו מדוע השיטה מתאימה (אין צורך לפתור את המשוואה בדרך השנייה).

פתרון:

א. המשוואה $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$ היא מטיפוס הומוגני ואפשר לפתור על ידי ההצבה $v = y/x$. מקבלים $y^2 = Cx - x^2$ דהיינו $y = \pm\sqrt{Cx - x^2}$.
תנאי ההתחלה $y(1) = 0$ גורר $C = 1$ ו-$y = \pm\sqrt{x - x^2}$. שתי פונקציות אלה אינן גזירות בנקודת ההתחלה $x = 1$, לכן הן לא יכולות להחשב לפתרונות לבעית ההתחלה הנתונה. שים לב כי בנקודה $(x, y) = (1, 0)$, המשוואה המנורמלת כלל אינה מוגדרת.

ב. שיטות פתרון אחרות: אם מארגנים את המשוואה בצורה $y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{x}{2}y^{-1}$, זו משוואת ברנולי.
אפשר גם לרשום כ-$(y^2 - x^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ ולמצא גורם אינטגרציה שתלוי ב-x.
עוד דרך היא להציב במשוואה המקורית $z = y^2,\ z' = 2yy'$, אך גם משוואת ברנולי מביאה לאותה הצבה.

שאלה 2 . (24 נקודות)

א. נתון כי למשוואה $xy''+(x-1)y'-y=0$ יש פתרון שהוא פונקציה מעריכית. מצאו אותו;

ב. מצאו את הפתרון הכללי למשוואה זו;

ג. פתרו את המשוואה $xy''+(x-1)y'-y=x^2e^{3x}$.

פתרון: הצב $y=e^{ax}$: מתקבל

$$e^{ax}\left(xa^2+(x-1)a-1\right)=e^{ax}\left(x(a^2+a)-a-1\right)=0$$

לכן $a^2+a=0,\ -a-1=0$, כלומר $a=-1$.

לא נכון לפתור כמשוואה רבועית ב-a ולהתיחס ל-$a=-1, a=\frac{1}{x}$ כאל שני פתרונות כי מדובר ב-a קבוע, לא תלוי ב-x.

לאחר שהתברר כי למשוואה הדיפרנציאלית יש פתרון $y_1=e^{-x}$, אפשר למצוא פתרון שני על ידי הורדת סדר או שמוש בזהות

$$y_2(x)=y_(x)\int\frac{e^{-\int p_1}}{y_1^2}\,dx$$

יש לשים לב כי לאחר נרמול המשוואה $p_1(x)=\frac{x-1}{x}$.

לאחר חישוב ארוך מקבלים $y_2=x-1$.

את המשוואה הבלתי הומוגנית אפשר לפתור על ידי וריאצית הפרמטרים וגם על ידי הורדת סדר. בשיטת וריאצית הפרמטרים יש לפתור את המערכת (לאחר נרמול!)

$$y''+\left(1-\frac{1}{x}\right)y'-\frac{1}{x}y=0$$

$$y_2(x)=e^{-x}\int\frac{e^{-\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}}{e^{-2x}}\,dx=e^{-x}\int\frac{xe^{-x}}{e^{-2x}}\,dx=e^{-x}\int xe^{x}dx=\begin{bmatrix}u=x & u'=1\\ v'=e^x & v=e^x\end{bmatrix}$$

$$=e^{-x}\left(xe^x-e^x\right)=x-1$$

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2\left(x-1\right)$$

$$\begin{aligned}c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)(x-1)&=0,\\ -c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)\cdot 1\qquad&=xe^{3x},\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & x-1 \\ -e^{-x} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1{}'(x) \\ c_2{}'(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ xe^{3x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & x-1 \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1{}'(x) \\ c_2{}'(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ xe^{3x} \end{bmatrix}$$

$$c_2{}'(x)=e^{3x} \quad => \quad c_2(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C_2$$

$$c_1{}'(x)=-\frac{(x-1)e^{3x}}{e^{-x}}=-(x-1)e^{4x} \quad => \quad c_1(x)=-\int xe^{4x}+\int e^{4x}dx=\begin{bmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^{4x} & v=\frac{1}{4}e^{4x} \end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}xe^{4x}+\frac{5}{16}e^{4x}+C_1$$

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2(x-1)+\frac{1}{3}e^{3x}(x-1)+\left(-\frac{1}{4}xe^{3x}+\frac{5}{16}e^{3x}\right)$$
$$=C_1e^{-x}+C_2(x-1)+\frac{1}{48}e^{3x}(4x-1)$$

שאלה 3 . (16 נקודות)

א. תהי משואה $y''+4y'+4y+9\varepsilon y=0$, כאשר ε הוא פרמטר. פתרו את המשוואה (התבוננו בכל הפתרונות האפשריים);

פתרון :

$$y''+4y'+4y+9\varepsilon y=0$$
$$r^2+4r+4+9\varepsilon=0$$
$$\Delta=16-4(4+9\varepsilon)=-36\varepsilon$$

$$case1: \ \varepsilon=0 \ => \ r_1=r_2=-2 \ => \ y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$$

$$case\ 2: \ \varepsilon<0 \ => \ r_{1,2}=\frac{-4\pm 6\sqrt{-\varepsilon}}{2}=-2\pm 3\sqrt{-\varepsilon} \ => \ y=C_1e^{\left(-2+3\sqrt{-\varepsilon}\right)x}+C_2e^{-\left(2+3\sqrt{-\varepsilon}\right)x}$$

$$case\ 3: \ \varepsilon>0 \ => \ r_{1,2}=\frac{-4\pm 6i\sqrt{\varepsilon}}{2}=-2\pm 3i\sqrt{\varepsilon} \ => \ y=e^{-2x}\left(C_1\cos\left(3x\sqrt{\varepsilon}\right)+C_2\sin\left(3x\sqrt{\varepsilon}\right)\right)$$

ב. רשמו את צורת פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית הבאה (אין צורך

לחשב את המקדמים) : $y'''-2y''+y'=2t^3+3e^t$.

פתרון :

$$r^3-2r^2+r=0$$

משוואה הומוגנית : $r_1=0,\ r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_{2,3}=1$

$$solutions=\{1,\ e^t,te^t\}$$

קבוצת UC = $\{t^3,t^2,t,1,e^t\}$

$$y(t)=(c_1+c_2t)e^t+c_3+\left(A+Bt+Ct^2+Dt^3\right)t+Et^2e^t$$

שאלה 4 . (32 נקודות)

נתונה המערכת $t>0$, $\bar{x}'(t)=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\bar{x}(t)+\begin{pmatrix}\frac{2}{t}e^{-3t}\\ \frac{1}{t}e^{-3t}\end{pmatrix}$.

א. פתרו את המערכת ההומוגנית המתאימה;

__פתרון__

א) נחשב ע"ע: $\begin{vmatrix}-4-r & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(4+r)(1+r)+2=r^2+5r+6=0 \Rightarrow r_1=-2,\ r_2=-3$

ב) נחשב ו"ע: ל- $r_1=-2$ נמצא $\underline{v}\neq\underline{0}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix}-4+2 & 2\\ -1 & -1+2\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t}.$$

ל- $r_1=-3$ נמצא $\underline{v}\neq\underline{0}$ כך ש:

$$\begin{pmatrix}-4+3 & 2\\ -1 & -1+3\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\underline{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{X}^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-3t}.$$

פתרון הומוגני כללי

ב. מצאו פתרון כללי של המערכת האי-הומוגנית;

$$\underline{X}^h = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-3t} = \begin{pmatrix}e^{-2t} & 2e^{-3t}\\ e^{-2t} & e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}.$$

ב) $\psi := \begin{pmatrix}e^{-2t} & 2e^{-3t}\\ e^{-2t} & e^{-3t}\end{pmatrix} \Rightarrow |\psi| = e^{-5t} - 2e^{-5t} = -e^{-5t}$.

נחפש פתרון פרטי $\underline{X}^p(t) = \begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}$. נמצא פתרון ל- $\begin{pmatrix}e^{-2t} & 2e^{-3t}\\ e^{-2t} & e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{t}e^{-3t}\\ \frac{1}{t}e^{-3t}\end{pmatrix}$

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix}\frac{2}{t}e^{-3t} & 2e^{-3t}\\ \frac{1}{t}e^{-3t} & e^{-3t}\end{vmatrix}}{|\psi|} = 0 \Rightarrow u_1(t) = c_1$$

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix}e^{-2t} & \frac{2}{t}e^{-3t}\\ e^{-2t} & \frac{1}{t}e^{-3t}\end{vmatrix}}{|\psi|} = \frac{\frac{1}{t}e^{-5t} - \frac{2}{t}e^{-5t}}{-e^{-5t}} = \frac{1}{t} \Rightarrow u_2(t) = \ln|t| + c_2.$$

צריך למצא פתרון פרטי אחד ולכן נקח $c_1 = c_2 = 0$ ואז

$$\underline{X}^p(t) = \begin{pmatrix}e^{-2t} & 2e^{-3t}\\ e^{-2t} & e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \ln|t|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^{-3t}\ln|t|\\ e^{-3t}\ln|t|\end{pmatrix},$$

$$\underline{X}(t) = \underline{X}^h(t) + \underline{X}^p(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix}2e^{-3t}\ln|t|\\ e^{-3t}\ln|t|\end{pmatrix}.$$

ג. מצאו את הפתרון הפרטי אם נתון $\bar{x}(\ln 2) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;

$$c1\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} + c2\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{8}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\ln|\ln 2|\\ \frac{1}{8}\ln|\ln 2|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$c1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c2\begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\ln|\ln 2|\\ 0.5\ln|\ln 2|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c1\\c2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\ln|\ln 2|\\ -0.5\ln|\ln 2|\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -0.5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c1\\c2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\ln|\ln 2|\\ 0.5\ln|\ln 2|\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}c1\\c2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\ln|\ln 2|\end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(t) = -\ln|\ln 2|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-3t}\ln|t| = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{-3t}\ln\left|\frac{t}{\ln 2}\right|$$

ד. פתרו את המערכת ב $t>0$, $\bar{x}'(t)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}\bar{x}(t)+\begin{pmatrix} e^{-at} \\ 0\end{pmatrix}$ בעזרת התמרת לפלס

כאשר $\bar{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1+e^{-at} \\ x_2' &= -x_1+\frac{1}{a}x_2 \end{aligned} \quad => \quad \begin{aligned} sF(s)-1 &= aF(s)+\frac{1}{s+a} \\ sG(s) &= -F(s)+\frac{1}{a}G(s) \end{aligned} \quad =>$$

$$(s-a)F(s)=1+\frac{1}{s+a} \;\Rightarrow\; F(s)=\frac{1}{s-a}+\frac{1}{(s-a)(s+a)}$$

$$F(s)+(s-\frac{1}{a})G(s)=0 \;\Rightarrow\; G(s)=-\frac{F(s)}{s-\frac{1}{a}}$$

$$F(s)=\frac{1}{s-a}-\frac{1}{2a}\frac{1}{s+a}+\frac{1}{2a}\frac{1}{s-a}=\left(1+\frac{1}{2a}\right)\frac{1}{s-a}-\frac{1}{2a}\frac{1}{s+a} \Rightarrow x_1=\left(1+\frac{1}{2a}\right)e^{at}-\frac{1}{2a}e^{-at}$$

$$G(s)=-\frac{F(s)}{s-\frac{1}{a}}=-\left(1+\frac{1}{2a}\right)\frac{1}{(s-a)\left(s-\frac{1}{a}\right)}+\frac{1}{2a}\frac{1}{(s+a)\left(s-\frac{1}{a}\right)}$$

$$=-\left(1+\frac{1}{2a}\right)\left(\frac{1}{a-\frac{1}{a}}\right)\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-\frac{1}{a}}\right]+\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+\frac{1}{a}}\right)\left[\frac{1}{s-\frac{1}{a}}-\frac{1}{s+a}\right]$$

$$=\frac{a+0.5}{1-a^2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-\frac{1}{a}}\right]+\frac{0.5}{1+a^2}\left[\frac{1}{s-\frac{1}{a}}-\frac{1}{s+a}\right]$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{a+0.5}{1-a^2}\left(e^{at}-e^{\frac{1}{a}t}\right)+\frac{0.5}{1+a^2}\left(e^{\frac{1}{a}t}-e^{-at}\right)=\frac{a+0.5}{1-a^2}e^{at}-\frac{0.5}{1+a^2}e^{-at}-a\frac{a^2+a+1}{1-a^4}e^{\frac{1}{a}t}$$

$$F(s)=\frac{1}{s+2}-G(s)+\frac{2}{(s+4)(s+2)(s+3)};$$

$$\frac{2}{(s+4)(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+4}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}\ :\ 2=A(s^2+5s+6)+B(s^2+7s+12)+C(s^2+6s+8)\ \Rightarrow$$

$$A+B+C=0,\ 5A+7B+6C=0,\ 6A+12B+8C=2$$

$$\Rightarrow A+B+C=0,\ 5A+7B+6C=0,\ 3A+6B+4C=1;$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\5&7&6\\3&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&-0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow C=-2,B=1,A=1$$

$$F(s)=\frac{1}{s+2}-G(s)+\frac{1}{s+4}+\frac{1}{s+2}+\frac{-2}{s+3}=-G(s)+\frac{1}{s+4}+\frac{2}{s+2}+\frac{-2}{s+3}\ =>\ x_1=\frac{1}{3}+e^{-2t}+e^{-4t}$$

שאלה 5 . (16 נקודות)

תהי $F(s)$ - התמרת לפלס של $f(t)$.

א. הוכיחו כי $L\{tf''(t)\}=-2sF(s)-s^2F'(s)+f(0)$

$$way\ 1:\quad L\{tf''(t)\}=-\frac{d}{ds}L\{f''(t)\}=-\frac{d}{ds}\left(s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\right)=-2sF(s)-s^2F'(s)+f(0)$$

$$way\ 2:\quad \int_0^\infty e^{-st}tf''(t)dt=\begin{bmatrix}u=te^{-st} & u'=e^{-st}-ste^{-st}\\ v'=f''(t) & v=f'(t)\end{bmatrix}=te^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\left(e^{-st}-ste^{-st}\right)f'(t)dt$$

$$=te^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt+s\int_0^\infty te^{-st}f'(t)dt=-L\{f'(t)\}+sL\{tf'(t)\}=-\left(sF(s)-f(0)\right)-s\frac{d}{ds}L\{f'(t)\}$$

$$=-sF(s)+f(0)-sF(s)-s^2F'(s)=-s^2F'(s)-2sF(s)+f(0)$$

$$L\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0);\quad -\frac{d}{ds}L\{f''(t)\}=-2sF(s)-s^2F'(s)+f(0)$$

ב. מצאו את המשוואה עבור $F(s)$ אם ידוע כי $f(t)$ היא פתרון של המשוואה $ty''+y'+ty=0$;

ג. פתרו את המשוואה עבור $F(s)$.

(ב) עושים התמרה של המשוואה ומקבלים

$$\left(-2sF(s) - s^2F'(s) + f(0)\right) + (sF(s) - f(0)) - F'(s) = 0$$

האיברים עם $f(0)$ מצתמצמים ונשאר

$$(1+s^2)F' + sF = 0$$

(ג) הפרדת משתנים:

$$\frac{F'}{F} = -\frac{s}{1+s^2}$$

עושים אנטגרל לשני הצדדים:

$$\ln F = -\frac{1}{2}\ln(1+s^2) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \frac{K}{\sqrt{1+s^2}}$$

כאשר K הוא קבוע.

שאלה 6. (11 נקודות)

נגדיר

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ e^{t-1}, & t \ge 1 \end{cases}$$

א. (2 נק') כתבו נוסחה ל- $f(t)$ בעזרת הפונקציה $u_c(t)$;

ב. (3 נק') חשבו את התמרת לפלס של $f(t)$;

ג. (6 נק') פתרו בעזרת התמרת לפלס את הבעיה

$$y'(0)=1\ ,\ y(0)=1\ ,\ y''-4y'+3y=f(t)$$

<u>פתרון</u>

נחשב את טרנספורם לפלס של המשוואה:

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-4(sY(s)-y(0))+3Y(s)=L\left[e^{t-1}u_1(t)\right]=e^{-s}\frac{1}{s-1}.$$

נציב תנאי התחלה ונקבל

$$s^2Y(s)-s-1-4(sY(s)-1)+3Y(s)=(s^2-4s+3)Y(s)-s+3=(s-1)(s-3)Y(s)-(s-3)=e^{-s}\frac{1}{s-1}.$$

$$(s-1)(s-3)Y(s)=e^{-s}\frac{1}{s-1}+(s-3)\ \Rightarrow Y(s)=e^{-s}\frac{1}{(s-1)^2(s-3)}+\frac{1}{(s-1)}.$$

נעשה התמרה הפוכה:

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{(s-1)^2(s-3)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right]\ ,$$

$$.\ \frac{1}{(s-1)^2(s-3)}=\frac{\alpha s+\beta}{(s-1)^2}+\frac{\gamma}{(s-3)}=\frac{\alpha s^2+\beta s-3\alpha s-3\beta+\gamma s^2-2\gamma s+\gamma}{(s-1)^2(s-3)}$$

נשווה מקדמים במונה ונקבל משוואות: $s^2:\alpha+\gamma=0,\ \ s^1:\beta-3\alpha-2\gamma=0,\ \ s^0:-3\beta+\gamma=1$

כלומר: $\alpha=\beta=-\frac{1}{4},\ \gamma=\frac{1}{4}$.

$$L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{(s-1)^2(s-3)}\right]=-\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{s+1}{(s-1)^2}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{(s-3)}\right]=-\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{s-1}{(s-1)^2}\right]-\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{2}{(s-1)^2}\right]+\frac{1}{4}L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{(s-3)}\right]$$

מכיוון ש: $L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right]=e^t,\quad L^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2}\right]=2te^t,\ \ L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{(s-3)}\right]=e^{3t}$

נשתמש בנוסחה: $L^{-1}\left[e^{-s}F(s)\right]=u_1(t)f(t-1)$ עבור שלושת המחוברים ונקבל

ואז $L^{-1}\left[e^{-s}\frac{1}{(s-1)^2(s-3)}\right]=-\frac{1}{4}u_1(t)e^{t-1}-\frac{1}{2}u_1(t)(t-1)e^{t-1}+\frac{1}{4}u_1(t)e^{3(t-1)}$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-\frac{1}{4}u_1(t)e^{t-1}-\frac{1}{2}u_1(t)(t-1)e^{t-1}+\frac{1}{4}u_1(t)e^{3(t-1)}+e^t.$$