פתרון מבחן בפונקציות מרוכבות

1. נסמן כרגיל $z = re^{i\theta}$. כזכור $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ולכן המשוואה היא

$$r^2e^{2i\theta}r^3e^{-3i\theta} = 32$$

$$r^5e^{-i\theta} = 32$$

כזכור r ממשי חיובי ולכן $r = 2$. נשארנו עם $e^{-i\theta} = 1$ ולכן $\theta = 2\pi k$. בכל מקרה, קיבלנו כי $z = 2$ הוא הפתרון היחיד.

2. יהי $\epsilon > 0$. אנחנו נמצא $R > 1$ כך ש $|f'(z_0)| < \epsilon$ לכל z_0 המקיים $|z_0| > R$ וזה יוכיח הדרוש. ראשית נבחר $R_1 > 1$ המקיים שלכל z כך ש $|z| > R_1$ מתקיים

$$|f(z)| < 2L$$

(יש כזה לפי הנתון). עכשיו, נבחר R_2 כך ש $R_2 > \frac{2L}{\epsilon}$. עכשיו נבחר $R = R_1+R_2+1$. יהי z_0 כלשהוא כך ש $|z_0| > R$. נסמן ב C מעגל סביב z_0 ברדיוס R_2. שימו לב שכל הנקודות על המעגל מרוחקות מראשית הצירים לפחות R_1.
לפי משפט קושי ואח"כ חסם ML:

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi}|\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}| \leq \frac{1}{2\pi}2\pi R_2 \frac{1}{R_2^2} \max_{z\in C}|f(z)|$$

היות שכל הנקודות על המעגל מרוחקות מראשית הצירים לפחות R_1 אז מתקיים ש

$$\max_{z\in C_{R_2}}|f(z)| \leq 2L$$

ולכן באי שוויון שלמעלה מקבלים

$$|f'(z_0)| \leq \frac{2L}{R_2} < \epsilon$$

לפי בחירת R_2.

3. (א) היות שזו פונקציה אנליטית בעלת פונקציה קדומה אפשר לחשב פשוט לפי ניוטון־לייבניץ

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{in\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{in}\ e^{in\theta}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{in}(e^{in2\pi}-1) = 0$$

(שימו לב שבשוויון האחרון השתמשנו בכך ש n שלם ולכן $e^{in2\pi} = 1$.

(ב) נשתמש בטכניקה הרגילה. נציב $z = e^{ix}$ ואז כרגיל $\cos x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ ו $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$. האינטגרל יוצא

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{2n}}\int\limits_C (z+\overline{z})^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

כאשר כרגיל C הוא מעגל היחידה ולכן בעצם $\overline{z} = \frac{1}{z}$ ולכן האינטגרל הוא

$$\frac{1}{2^{2n}} \int\limits_C (z + \frac{1}{z})^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

לפי בינום ניוטון זה שווה ל

$$\frac{1}{2^{2n}} \int\limits_C \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} z^{2n-2m} \frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{2^{2n}i} \int\limits_C \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} z^{2n-2m-1}$$

עכשיו רוצים להשתמש במשפט השאריות. לשמחתנו הפונקציה שבתוך האינטגרל כבר רשומה כטור לורן. השארית היא המקדם של האיבר שעבורו

$$2n - 2m - 1 = -1$$

כלומר האיבר של $m = n$. לפי משפט השאריות נקבל

$$\frac{1}{2^{2n}i} \int\limits_C \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} z^{2n-2m-1} = \frac{2\pi i}{2^{2n}i} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n} \pi$$

וזהו, זה האינטגרל.

4. זאת סיטואציה די סטנדרטית. ראשית נשים לב שהאינטגרל מתכנס לפי דיריכלה ולכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2 - 4x + 8)^2} \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin 3x}{(x^2 - 4x + 8)^2} \mathrm{d}x$$

ולכן מספיק לחשב את הביטוי הימני. כמו כן כרגיל

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin 3z}{(z^2 - 4z + 8)^2} \mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R} \mathrm{Im} \frac{e^{3iz}}{(z^2 - 4z + 8)^2} \mathrm{d}z = \mathrm{Im} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{3iz}}{(z^2 - 4z + 8)^2} \mathrm{d}z$$

לכן מספיק לחשב את

$$\mathrm{Im} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{3iz}}{(z^2 - 4z + 8)^2} \mathrm{d}z$$

נסמן ב Δ_R את חצי המעגל העליון לאורך המעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו R ונסמן ב C_R את חצי המעגל הזה יחד עם הקטע $[-R, R]$. כמובן ש

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{3iz}}{(z^2 - 4z + 8)^2} \mathrm{d}z + \int\limits_{\Delta_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2 - 4z + 8)^2} \mathrm{d}z = \int\limits_{C_R} \frac{e^{3iz}}{(z^2 - 4z + 8)^2} \mathrm{d}z$$

כרגיל בעזרת למת ז'ורדן אפשר להוכיח ש

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Delta_R}\frac{e^{3iz}}{(z^2-4z+8)^2}\mathrm{d}z=0$$

ולכן מספיק לחשב את

$$\int\limits_{C_R}\frac{e^{3iz}}{(z^2-4z+8)^2}\mathrm{d}z$$

עבור R גדול מספיק (כלומר שכל הסינגולריות בתוך C_R). שאת זה עושים כרגיל עם משפט השאריות. נשים לב ש

$$z^2-4z+8=(z-(2+2i))(z-(2-2i))$$

ולכן יש רק קוטב אחד בתחום הרלוונטי והוא $2+2i$ שהוא קוטב מסדר 2. כדי למצוא את השארית נשתמש בנוסחא הרגילה. נגזור את

$$(\frac{e^{3iz}}{(z-(2-2i))^2})'=\frac{3ie^{3iz}(z-(2-2i))^2-2(z-(2-2i)e^{3iz}}{(z-(2-2i))^4}$$

נציב את $z=2+2i$ ונקבל

$$\frac{3ie^{-6+6i}(-16)-2(4i)e^{-6+6i}}{256}=e^{-6+6i}\frac{-56i}{256}=e^{-6+6i}\frac{-7i}{32}$$

ולכן

$$\int\limits_{C_R}\frac{e^{3z}}{(z^2-4z+8)^2}\mathrm{d}z=2\pi ie^{-6+6i}\frac{-7i}{32}=\frac{7\pi}{16e^6}e^{6i}$$

המספר שאנחנו מחפשים הוא החלק הדמיוני שהוא:

$$\frac{7\pi}{16e^6}\sin 6$$

5. קודם כל נבצע $z\mapsto\sqrt{z}$ כאשר השורש מוגדר לפי הענף העיקרי של הלוגריתם. התמונה של פעולה זו היא כל ערכי z עם $\operatorname{Re} z>0$ (חצי המישור הימני). נבצע $z\mapsto iz$ כדי להעביר אותנו לחצי המישור העליון. כידוע $\frac{z-i}{z+i}$ מעבירה את חצי המישור העליון למעגל היחידה אבל היא מעבירה את i ל 0 ובינתיים 4 עבר ל $4\mapsto 2\mapsto 2i$. אז נבצע קודם $z\mapsto\frac{z}{2}$ כדי להעביר את $2i$ ל i ואז נבצע $\frac{z-i}{z+i}$.

6. נשתמש כמובן במשפט רושה. ניקח $R>1$ ונסתכל על חצי העיגול הימני של עיגול ברדיוס R שמרכזו בראשית הצירים יחד עם הקטע $[-Ri,Ri]$. נקרא למסילה הזאת Γ_R. נשתמש במשפט רושה ונראה שעבור R גדול מספיק, ל $z^{16}+z^{13}+4$ יש אותו מספר שורשים כמו $z^{16}+4$. כזכור זה אומר שבכל חצי המישור הימני יש להם אותו מספר שורשים (כאן יש הרי רק מספר סופי של שורשים אז מתישהוא יהיה R מספיק

גדול שכל השורשים בחצי המישור הימני יכללו בתוך Γ_R). עכשיו צריך להוכיח שלכל $z \in \Gamma_R$ אכן מתקיים

$$|z^{13}| < |z^{16} + 4|$$

נשים לב שאם z מדומה טהור אז z^{16} ממשי חיובי ולכן $|z^{16} + 4| = z^{16} + 4$ ואז אם $|z| \leq 1$ אז בוודאי

$$|z^{13}| < 4 < 4 + z^{16}$$

ואם $|z| > 1$ אז

$$|z^{13}| < z^{16} < z^{16} + 4$$

ולכן אי השוויון מתקיים לערכי z ב $[-Ri, Ri]$. אם z נמצא דווקא על חצי המעגל ברדיוס R אז

$$|z^{13}| = R^{13}$$

ואילו

$$|z^{16} + 4| \geq R^{16} - 4 > R^{13}$$

עבור ערכי R גדולים ולכן אי השוויון מתקיים בכל Γ_R.
קיבלנו שמספר האפסים בחצי המישור הימני הוא כמספר האפסים בחצי המישור הימני של $z^{16} + 4$. כמה כאלה יש? כמובן שלפולינום זה יש 16 שורשים בכל $\mathbb{C}$. אף אחד מהם לא נמצא על ציר y כי כאמור אם z מדומה טהור אז z^{16} ממשי חיובי. לכל שורש z בחצי המישור הימני מתאים שורש $-z$ בחצי המישור השמאלי. קיבלנו שחצי מהשורשים נמצאים בחצי המישור הימני כלומר: 8 שורשים.