פתרון מבחן מועד א' תשע"ט חממה.

שאלה 2

נאמר שסידרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **חד־חד ערכית** אם לכל שני מספרים טבעיים $i \neq j$ מתקיים $x_i \neq x_j$.

תהי f פונקציה ממשית, ותהי a נקודת הצטברות של תחום ההגדרה של הפונקציה f.

הוכח: $\lim_{x \to a} f(x) = b \iff$ לכל סידרה **חד־חד ערכית** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ בתחום ההגדרה של הפונקציה כך ש $x_n \longrightarrow a$, מתקיים $f(x_n) \longrightarrow b$.

קיימת סדרה a_n שנמצאת בתוך תחום ההגדרה עבורה $a \neq a_n \to a$

בכיוון ראשון, אם $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ אז לפי היינה לכל סדרה $a \neq x_n \to a$ מתקיים כי $f(x_n) \to b$

אם זה נכון לסדרות באופן כללי, זה בוודאי נכון לסדרות חח"ע.

כיוון שהסדרה חח"ע לכל היותר איבר אחד מהסדרה עשוי להיות שווה לa ומספר סופי של איברים לא משפיע על הגבול.

כעת, נניח שלכל סדרה חח"ע $x_n \to a$ מתקיים כי $f(x_n) \to b$ צריך להוכיח ש $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

נוכיח לפי הגדרת הגבול לפי היינה, תהי $a \neq x_n \to a$ צריך להוכיח כי $f(x_n) \to b$

שתי אפשרויות:

קבוצת האיברים השונים בסדרה x_n היא סופית

(המחשה) 1,2,3,2,3,2,3,1,2,3,1,2,3

החל משלב מסויים הסדרה קבוע, וכיוון שהיא שואפת לa היא קבועה a בסתירה לנתונים.

לכן יש אינסוף איברים שונים בסדרה.

ניקח את תת הסדרה החח"ע של כל האיברים השונים נסמנה x_{k_n}.

כיוון ש $x_{k_n} \to a$ וגם חח"ע נובע כי $f\left(x_{k_n}\right) \to b$.

הוכחנו שלכל תת סדרה של $f(x_n)$ יש תת סדרה השואפת לb ולכן סה"כ $f(x_n) \to b$ כי אין לה גבולות חלקיים אחרים.

שאלה 3

נתונה העובדה הבאה (אינך מתבקש להוכיחה):

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma := 0.57721\ldots$$

א. יהי $0<a$ מספר ממשי. הוכח שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\log n}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

ב. לכל מספר ממשי $0<a$, קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ מתכנס או מתבדר.

סעיף א': נבצע את מבחן ההשוואה הגבולי

$$\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{a^{\log(n)}} = a^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log(n)} \to a^{\gamma}$$

גבול המנה הוא מספר סופי, גדול מאפס, ולכן הטורים חברים.

סעיף ב': בעצם לפי סעיף קודם צריך לקבוע לאילו ערכי הפרמטר a הטור $\sum a^{\log(n)}$ מתכנס.

ראשית, אם $a \geq 1$ אזי $a^{\log(n)} \nrightarrow 0$ ולכן הטור מתבדר.

נניח מעתה כי $0<a<1$

ראשית $a^{\log(n)}$ מונוטונית יורדת כי החזקה מונוטונית עולה והבסיס בין אפס לאחד.

לכן לפי מבחן העיבוי, הטור שלנו חבר של הטור

$$\sum 2^n a^{\log(2^n)} = \sum 2^n a^{n\log(2)} = \sum \left(2a^{\log(2)}\right)^n$$

כלומר הטור מתכנס אם ורק אם $2a^{\log(2)} < 1$

$$a^{\log(2)} < \frac{1}{2}$$

$$a < \frac{1}{2^{\frac{1}{\log(2)}}} = \frac{1}{e^{\log\left(2^{\frac{1}{\log(2)}}\right)}} = \frac{1}{e}$$

שאלה 4

מצא את הנקודות בהן הפונקציה

$$f(x) := [x] + [-x]$$

אינה רציפה. עבור כל נקודת אי־רציפות, מצא את סוג אי הרציפות שלה.

(עבור מספר ממשי a, $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le a\}$ הוא הערך השלם של a.)

אם $x \in \mathbb{Z}$ אז

$$f(x) = [x] + [-x] = x + (-x) = 0$$

אם $k < x < k + 1$

$$[x] = k$$

וכמו כן

$$-(k+1) < -x < -k$$

$$[-x] = -(k+1)$$

סה"כ לכל $x \notin \mathbb{Z}$

$$f(x) = [x] + [-x] = k - (k+1) = -1$$

לכן הפונקציה קבועה -1 בכל הנקודות שאינן שלימות, ולכן יש לה אי רציפות סליקה בכל מספר שלם, והיא רציפה בכל מספר שאינו שלם.

שאלה 5

תהי

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \le 2 \\ ax + b & x > 2 \end{cases}.$$

א. מצא את ערכי הפרמטרים a, b שעבורם הפונקציה f גזירה בכל הישר הממשי.

ב. האם יש פרמטרים a, b כך שהנגזרת השניה f'' קיימת בכל הישר הממשי?

סעיף א' לכל $x \neq 2$ ברור שהפונקציה גזירה.

אם הפונקציה גזירה ב$x = 2$ וודאי היא רציפה שם, נראה ראשית מה זה אומר.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} ax + b = 2a + b$$

(הצד השני מיותר במקרה הספציפי הזה)

עד כה הסקנו כי $2a + b = 4$

עבור הגזירות, אנחנו רוצים שגבול שיפועי המיתרים יהיה קיים וסופי.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$$

חייבים לפרק לגבולות חד צדדיים, הרי הביטוי של הפונקציה תלוי בצד

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{ax + b - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{ax - 2a}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} a \cdot \frac{x - 2}{x - 2} = a$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} x + 2 = 4$$

ולכן צריך ש $a = 4$ ולכן $b = -4$

סעיף ב' מסעיף א', כיוון שאנחנו חייבים שהפונקציה תהיה גזירה לפחות פעם אחת בכל הממשיים, הערכים היחידים שאפשריים הם אלה שמצאנו. כלומר נבחן האם הפונקציה גזירה פעמיים עבור ערכים אלה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 2 \\ 4x - 4 & x > 2 \end{cases}$$

נמצא את הנגזרת הראשונה (באמצעות סעיף א')

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

האם הנגזרת גזירה ב$x = 2$?

שוב צריך את גבול שיפועי המיתרים

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{f'(x) - 4}{x - 2}$$

שוב נפצל

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4 - 4}{x - 2} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2x - 4}{x - 2} = 2 \neq 0$$

ולכן הנגזרת אינה גזירה, והפונקציה המקורית לעולם אינה גזירה פעמיים בכל הממשיים.