בס"ד

תרגיל בית מספר 3

הנחיות הגשה:

1) בעמוד הראשון של הפתרון יש לציין שם פרטי, שם משפחה, ת.ז. וקבוצת תרגול.
2) יש לכתוב את הפתרון בכתב ברור ובצורה מסודרת.
3) את התרגיל יש להגיש בתחילת התירגול שמתקיים בתאריך 10.8

1. נתונה המשוואה $f(x)=2x-\cos x=0$.

(א) הראה כי קיים פתרון למשוואה זו בתחום $[0,\pi]$ ושפיתרון זה הינו יחיד.

(ב) נתונות שתי שיטות איטרטיביות לפיתרון משוואה זו:

(1) $\varphi_1(x)=\frac{\cos x}{2};x_{n+1}=\varphi_1(x_n)$

(2) $\varphi_2(x)=\cos x-x;x_{n+1}=\varphi_2(x_n)$

בדוק את ההתכנסות ואת סדר ההתכנסות של כל אחת משיטות אילו.

2. נתונה הפונקציה

$$f(x)=(1-e^x)\ln(1+x)$$

(א) הפיעלו 5 איטרציות בשיטת ניוטון-רפסון (Newton-Raphson) למציאת שורש(י) הפונקציה $f(x)$ עבור ערך התחלתי $x_0=0.4$. (עבדו בדיוק של 6 ספרות אחרי הנקודה העשרונית). לאיזה שורש לדעתכם מתכנס הפתרון? הסבירו.

(ב) מצאו סדר ההתכנסות לשורש המבוקש על סמך התוצאות המספריות מסעיף א' והגדרת סדר התכנסות. (כלומר, חשבו בכל שלב את ההפרש x_n-x_{n-1} (עבור $n\geq1$) ואת מנת ההפרשים עבור ערכי n עוקבים).

(ג) האם סדר ההתכנסות זהה לסדר ההתכנסות התיאורטי עבור שיטת ניוטון-רפסון? נמקו באופן מדויק. אם לא, הציעו איטרציה שסדר ההתכנסות שלה זהה (עקרונית) לזה של שיטת ניוטון-רפסון המקורית.

הערה: אין צורך לחשב את האיטרציות עבור השיטה החלופית.

בשאלה הבאה יש לעבוד בדיוק של 4 ספרות עשרוניות בייצוג לפי נקודה צפה (<u>floating point</u>) תוך <u>עיגול</u> מתאים <u>לאחר כל פעולה</u>

3. נתונה מערכת משוואות הבאה

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 100 \\ 1 & 10 & -0.001 \\ 3 & -100 & 0.01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(א) פתור על ידי אלימינצית גאוס עם שחלוף שורות (pivoting חלקי)

(ב) פתור על ידי אלימינצית גאוס עם pivoting מלא.

(ג) פתור את המערכת על ידי אלימינציית גאוס עם scaling .

4. נתונה מטריצת המערכת

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0.1 & -1.1 & 5.1 \end{pmatrix}$$

(א) חשב את המטריצה ההופכית A^{-1} ע"י פירוק $A=L\cdot U$. הסבר באופן מדויק ומפורט את שלבי החישוב השונים. יש לעבוד בדיוק של 5 ספרות עשרוניות בייצוג לפי נקודה צפה (<u>floating point</u>) תוך <u>עיגול</u> מתאים <u>לאחר כל פעולה</u>;

(ב) השוו את הפירוק שקיבלתם עם מה שמקבלים ב- Matlab ע"י פקודות [l,u,p]=lu(A) ומטריצה הופכית שקיבלתם עם מה שמקבלים ב-Matlab ע"י פקודת inv(A) ;

(ג) מהו מספר המצב (<u>condition number</u>) של המטריצה A (ביחס ל- 1-norm או ∞-norm)? מה משמעות הערך שחושב?

(ד) חשב את הפתרון x_1 של המערכת $Ax=b$ בעזרת פירוק LU שמצאת עבור וקטור קלט $b_1=(4,\ 4,\ 4.1)^T$ ואת הפתרון x_2 עבור וקטור קלט $b_2=(4,\ 4,\ 4)^T$. מהי השגיאה היחסית המתקבלת? השווה ביחס לחסם עליון (תיאורטי) על השגיאה היחסית כפי שנלמד בהרצאות.

5. נתונה מערכת משוואות: $\varepsilon=2^{-64}$, $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (כאשר עובדים בדיוק double, $\varepsilon_{machine}\le 2^{-52}$).

(א) פתרו את המערכת ע"י דירוג מטריצה ללא pivoting.

(ב) פתרו את המערכת עם pivoting חלקי.

(ג) מהו מספר מצב של המטריצה כפונקציה של ε אם משתמשים ב- $\|\cdot\|_\infty$?

6. נתונה מטריצה: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 14 & -8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

פתרו את מערכת המשוואות $Ax=b$ כאשר $b=\begin{pmatrix}7 & 1 & 20 & -7\end{pmatrix}^T$ בעזרת פירוק LU עם **pivoting חלקי** (המחשב מדייק ב- 4 ספרות משמעותיות).

7. תהי מערכת $Ax=b$ עם *A* - מטריצה ריבועית *nxn* ו-*b* - וקטור *nx1* .
הוכח כי שיטת גאוס עדיפה על "שיטת בית הספר". השוו מספר פעולות חיסור/חיבור + כפל/חילוק בכל אחת מהשיטות. קשרו את המסקנה לשגיאה יחסית לכל פעולה.

שיטת בית הספר למי שלא זוכר: אם יש לי משוואות

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n &= b_1 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n &= b_2 \end{aligned}$$

ואני רוצה "להיפתר" מ- x_1 במשוואה שנייה אזי אני עושה את הפעולה הבאה

$$\begin{aligned} & a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_1 \ / \cdot c_1 \\ & - \\ & \underline{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_2 \ / \cdot a_1} \\ & (a_2c_1 - c_2a_1)x_2 + \ldots + (a_nc_1 - c_na_1)x_n = b_1c_1 - b_2a_1 \end{aligned}$$

כלומר המערכת השקולה שקיבלתי היא

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots \qquad\qquad + a_nx_n \qquad\qquad &= b_1 \\ (a_2c_1 - c_2a_1)x_2 + \ldots + (a_nc_1 - c_na_1)x_n &= b_1c_1 - b_2a_1 \end{aligned}$$

הערה : נוסחת עזר $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8. **תרגיל מעשי.**

(א) כתוב את הפונקציה function X=lufact(A,B) הבונה פתרון של מערכת ליניארית AX=B , כאשר A – מטריצה לא סינגולרית ע"י פירוק PA=LU .

כאן : A – מטריצה NxN , B- מטריצה Nx1 , X – מטריצה Nx1 שהיא הפתרון של המערכת הנ"ל.

בתוכנה תיישמו דברים הבאים :

(1) בחירת pivot

(2) שיחלוף שורות. תשתמש בפונקצית max של MATLAB.

(3) בדיקה של אי-סינגולריות של המטריצה

(4) חישוב של כופלי השורות

(5) חישוב וקטור Y – פתרון של LY=PB

(6) חישוב וקטור X – פתרון שך UX=Y

(ב) השתמש בתוכנה שכתבת ופתור מערכת שבה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

השתמש בפקודת MATLAB הבא : $[L,U,P]=lu(A)$ כדי לבדוק את התשובה.

בהצלחה!