תרגיל 1

1 במרץ 2016

1. הוכיחו בעזרת תכונות שדה כי בכל שדה $(\mathbb{F},+,\cdot)$ מתקיים $\forall a\in\mathbb{F}:(-a)^2=a^2$
(ניתן להשתמש בתוצאות שהראנו בכיתה $-(-a)=a,\ (-1)\,a=-a$)

פתרון:

על פי התכונות שראינו בכיתה: $-(-a)=a \quad (-1)\,a=-a,$

$$(-a)^2=(-a)\,(-a)=(-1)\,a\,(-1)\,a=a\,(-1)\,(-1)\,a=a\,(-(-1))\,a=a1a=aa=a^2$$

כאשר המעבר השני נובע מתכונה 1.
המעבר השלישי נובע מחילופיות כפל.
המעבר הרביעי נובע מתכונה 1.
המעבר החמישי נובע מתכונה 2
המעבר השישי נובע מתכונת איבר ניטרלי לכפל.

2. הוכיחו את התכונות הבאות:
א. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
ב. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
ג. $\overline{(\overline{z})}=z$
ד. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

פתרון:

נסמן $z_1=a_1+b_1i,\ a_2+b_2i$
א.
מצד אחד:

$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2} &= \overline{(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)}=\overline{a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\,i}\\ &= a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\,i\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= \overline{(a_1+b_1i)}\cdot\overline{(a_2+b_2i)}=(a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i)\\ &= a_1a_2-b_1b_2+(-a_1b_2-a_2b_1)\,i=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\,i\end{aligned}$$

ולכן השוויון מתקיים.

ב.

$$\begin{aligned} \overline{z_1+z_2} &= \overline{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)} = \overline{a_1+a_2+(b_1+b_2)\,i} = a_1+a_2-(b_1+b_2)\,i \\ &= a_1-b_1i+a_2-b_2i = \overline{(a_1+b_1i)}+\overline{(a_2+b_2i)} \end{aligned}$$

ג. $\overline{(\overline{z})} = \overline{(a-bi)} = a+bi = z$

ד. נשתמש בתוצאה שהוכחנו בכיתה: $|z|^2 = z\overline{z}$ ובתכונה שהוכחנו בסעיף א':
$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)\,\overline{(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2\,|z_2|^2$
(שימו לב שהשתמשנו פה בתכונות השדה אסוציטיביות וחילופיות).
לפי הגדרת ערך מוחלט מתקיים $|z_1|, |z_2|, |z_1 \cdot z_2| \geq 0$ לכן נוכל להסיק מן השיוויון לעיל כי
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

3. פתור את המשוואה הבאה:

$$z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$$

פתרון

לפתרון המשוואה נוכל להשתמש בנוסחא המוכרת לפתרון משוואה ריבועית

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

אבל מאחר ו־$a,b,c \in \mathbb{C}$, נצטרך לעבוד כדי למצוא את $\sqrt{b^2-4ac}$.
נסמן $\Delta = b^2 - 4ac$.
במקרה שלנו: $a=1,\ b=-2i,\ c=2-4i$
$\Delta = (-2i)^2 - 4\,(2-4i) = -4-8+16i = -12+16i$.
נצטרך למצוא את $\sqrt{-12+16i}$ נסמן $u = \sqrt{-12+16i}$ נמצא u כך ש־ $u^2 = -12+16i$ נסמן $u = x+yi$

$$\begin{aligned} (x+yi)^2 &= -12+16i \\ &\Updownarrow \\ x^2-y^2+2xyi &= -12+16i \end{aligned}$$

נשווה חלק ממשי לחלק ממשי וחלק מדומה לחלק מדומה, ונקבל מערכת של שתי משוואות מעל הממשיים:

$$\begin{aligned} (1)\ \ y^2-x^2 &= -12 \\ (2)\quad 2xy &= 16 \end{aligned}$$

מתכונות הערך המוחלט שהוכחנו בשאלה קודמת:

$$\left|u^2\right| = |u|^2 = x^2 + y^2 = |-12+16i| = \sqrt{(-12)^2 + (16)^2} = 20$$

קיבלנו שוויון שלישי

$$(3)\ \ x^2 + y^2 = 20$$

נחבר שויון (3)+(1) ונקבל:

$$2x^2 = 8,\ \ x = \pm 4$$

נציב במשוואה (2) ונקבל

$$y = \pm 2$$

קיבלנו אם כן שני שורשים שונים ל-u

$$u_1 = 2+4i,\ \ u_2 = -2-4i$$

נבחר פיתרון אחד ונציב במשואה:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2i \pm u_1}{2} = i \pm (1+2i) \\ z_1 &= 1+3i \\ z_2 &= 1-i \end{aligned}$$

שימו לב כי לא משנה אם נבחר להציב בנוסחא את u_1 או את u_2 נקבל את אותם הפתרונות.