

מבחן לדוגמא – בדידה למורים – תשע"ז

משך המבחן: שלוש שעות.

הוראות: יש לענות על כל השאלות. כל שאלה שווה 24 נק'. כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

1. נגדיר שפונקציה f נקראת כופלת אם היא מקיימת את התנאי

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

קבעו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא כופלת:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad g(x) = \sin(x) \quad f(x) = x^2$$

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שתי קבוצות A, B מתקיים כי $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים כי $(A \setminus B) \cup C = (C \cup A) \setminus (B \setminus C)$

ג. לכל שתי קבוצות A, B מתקיים כי $A \setminus B \subseteq B \setminus A$ אם ורק אם $A \subseteq B$

3. תהי סדרה מוגדרת ע"י $a_1 = 1, a_2 = 8$ ונוסחת הנסיגה $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.

הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$.

4. תהיינה שתי פונקציות $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המקיימות לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $f(n) = g(2n)$.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f חח"ע אז גם g חח"ע.

ב. אם f על אז גם g על.

ג. אם g חח"ע אז f אינה על.

5. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ כאשר:

א. כל הפתרונות הם מספרים שלמים שגדולים או שווים אפס.

ב. כל הפתרונות הם מספרים שלמים גדולים ולא שווים אפס.

ג. כל הפתרונות הם מספרים שלמים שגדולים או שווים אפס וגם $x_1 \leq 2$.