מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 4

תרגיל 1. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם הנפרש שווה לקבוצה שאליו משווים. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים.

.1

$$\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} span\left\{\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6 & 5 & 12\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^3$.

$(0,0,1) \notin span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$, נניח בשלילה שכן, אז קיימים $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$(0,0,1) = \alpha(2,0,4) + \beta(0,1,0) + \gamma(6,5,12)$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + 6\gamma \\ 1 = 4\alpha + 12\gamma \end{cases}$$

והדבר לא אפשרי.

.2

$$\mathbb{R}^2 \stackrel{?}{=} span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון.

הנפרש שווה ל-$\mathbb{R}^2$.

יהי וקטור כללי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ נראה שקיימים סקלרים α,β כך ש-

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x = 2\beta \\ y = \alpha + 4\beta \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \beta = \frac{x}{2} \\ \alpha = y - 2x \end{cases}$$

לכלומר לכל וקטור $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ניתן למצוא סקלרים שיתנו את הצירוף לינארי הדרוש למשל כדי לקבל את הווקטור $\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$ניקח

$$\begin{cases} \beta = \frac{10}{2} = 5 \\ \alpha = 4 - 2\cdot 10 = -16 \end{cases}$$

ואכן מתקיים

$$-16\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

.3

$$\mathbb{R}_3\left[x\right] \stackrel{?}{=} span\left\{1, x+x^2, 4x^3+x^2, 2x\right\}$$

כאשר

$$\mathbb{R}_3\left[x\right] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

מרחב כל הפולינומים עד דרגה 3

פתרון.

הנפרש שווה ל-$\mathbb{R}_3\left[x\right]$.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = a_0\cdot 1+\left(a_2-\frac{1}{4}a_3\right)\cdot(x+x^2)+\frac{1}{4}a_3\cdot(4x^3+x^2)+\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{8}a_3\right)\cdot(2x)$$

.4

$$\mathbb{R}^{2\times 2} \stackrel{?}{=} span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

כאשר

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} | a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}\right\}$$

מרחב כל המטריצות מגודל 2×2

פתרון.

הנפרש לא שווה ל-$\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right\}$, נניח בשלילה

שכן, אז קיימים $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

מכאן צריך להתקיים

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + 5\delta \\ 0 = 2\alpha - \beta + \gamma + 3\delta \\ 0 = \alpha - \beta + \gamma + 3\delta \\ 1 = 2\alpha + \beta + 5\delta \end{cases}$$

והדבר לא אפשרי (מוזמנים לפתור ולבדוק).

תרגיל 2. מצא k כך שהקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

תלוייה לינארית ?

פתרון.

נחפש k כך שלמערכת $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix}0\\1\\k\end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}\alpha$ יהיה פתרון לא טריוואלי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & -k & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k+1 & 0 \end{array}\right)$$

כאשר $k = 1$ יש פתרון לא טריוואלי. במהלך הדירוג חילקנו ב-k לכן יש לבדוק מה קורה למטריצה עבור $k = 0$ בשלב לפני החלקה ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

וגם כאן יש פתרון לא טריוואלי. לסיכום, עבור $k = 0, 1$ הווקטורים תלווים לינארית.

תרגיל 3. מצא k כך שהקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\k\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

תלויה לינארית ?

פתרון.

מחפשים k כך שלמערכת

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\k\\1\\-1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\0\\1\\k\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

יהיה פתרון לא טריוואלי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ k & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & k & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2k & 3-2k & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2k & 3-2k & 0 \\ 0 & k+2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-4k & 0 \\ 0 & 0 & 2k+4 & 0 \end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון לא טריוואלי צריך שיתקיים $2k+4=0$ וגם $3-4k=0$ כלומר צריך שיתקיים $k=-2$ **וגם** $k=\frac{3}{4}$ הדבר הזה לא יתכן לכן לכל k הווקטורים בת"ל.

תרגיל 4. יהיו

$$v=\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right), w=\left(\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right) \in \mathbb{R}^2$$

הוכיחו שאם v_1, v_2 תלויים לינארית אז

$$ad-bc=0$$

פתרון.

נתון ש-v, w כלומר קיימים α, βלא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right)+\beta\left(\begin{array}{c} c \\ d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & 0 \\ 0 & da-bc & 0 \end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון לא טריוואלי חייב לתקיים $da-bc=0$

תרגיל 5. הוכחו: יהיו u, v בת"ל ו-$w \in Sapn\{u, v\}$ אז $\{u, v, w\}$ ת"ל

פתרון. נהיות ו-

$$w \in Sapn\{u, v\}$$

קיימים α, β כך ש-

$$w=\alpha u+\beta v$$

לכן

$$0 = \alpha u + \beta v - w$$

כלומר קיים צל לא טריוואלי שיתן לנו את ווקטור ה-0 ולכן $\{u, v, w\}$ת"ל.

בהצלחה!!