# תורת הקבוצות־ תרגיל בית 3

## פתרון

1. הוכיחו: $\alpha$ טבעי $\iff$ $s(\alpha)$ טבעי.

פתרון: $\Longleftarrow$:נניח $\alpha$ טבעי. יהי $\beta \leq s(\alpha)$. אזי $\beta \leq \alpha$ או $\beta = s(\alpha)$. אם $\beta = s(\alpha)$ אז $\beta$ עוקב. אם $\beta \leq \alpha$ אז בגלל ש$\alpha$ טבעי $\beta$ הוא או $0$ או עוקב.

$\Longrightarrow$: נניח $s(\alpha)$ טבעי. יהי $\beta \leq \alpha$, בפרט $\beta < s(\alpha)$. בגלל ש$s(\alpha)$ טבעי, $\beta$הוא או $0$ או עוקב.

2. נגדיר את $\omega$ להיות קבוצת כל הסודרים הטבעיים.

א. הוכיחו ש $\omega$ סודר.

ב. הוכיחו ש$\omega$ הוא הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו $\emptyset$.

פתרון:

א. $\omega$ הוא קבוצה של סודרים. צריך להוכיח שהיא $\in-$טרנזיטיבית. שקול להגיד: כל איבר של סודר טבעי הוא סודר טבעי. ובכן, יהי $\alpha$ סודר טבעי ו$\beta < \alpha$. צריך להוכיח ש$\beta$טבעי. יהי $\gamma \leq \beta$. אז $\gamma < \alpha$, ולכן $\gamma$ הוא או $0$ או עוקב. $\Longleftarrow$ $\beta$ טבעי.

ב. ראשית, נוכיח ש$\omega$ גבולי. לצורך כך, מספיק להוכיח שאם $\alpha \in \omega$ אז גם $s(\alpha) \in \omega$. כלומר, אם $\alpha$טבעי אז גם $s(\alpha)$ טבעי. זה בדיוק מה שהוכחנו בשאלה 1.

כעת, נוכיח שאם $0 \neq \alpha < \omega$ אז $\alpha$ עוקב.

אם $0 \neq \alpha < \omega$ אז $0 \neq \alpha \in \omega$. כלומר, $0 \neq \alpha$ טבעי. מהגדרה זה אומר ש$\alpha$ עוקב.

3. נקח את הקבוצה $A = \omega \subseteq S(\omega)$. אז כמובן ש$0 \in A$. כמו כן, הוכחנו בשאלה $1$ שאם סודר הוא טבעי אז גם העוקב שלו טבעי, ולכן $A$ מקיימת את התכונה המבוקשת: $\alpha \in A \Longrightarrow S(\alpha) \in A$. אולם, ברור ש$\omega \neq S(\omega)$.

4. נסמן $\beta = \sup_{\alpha \in A}\{\alpha + 1\}$. ראשית, נוכיח ש$\beta$ גדול ממש מכל איברי $A$. ובכן, יהי $\alpha \in A$. אזי $\alpha < \alpha + 1 \leq \beta$ (מהגדרת הסופרימום). שנית, יהי $\gamma < \beta$. אנחנו רוצים להוכיח ש$\gamma$ לא גדול ממש מכל איברי $A$. ובכן, מהגדרת הסופרימום, מכיוון ש$\gamma$ קטן מהסופרימום, יש $\alpha \in A$ כך ש $\gamma < \alpha + 1$. לכן מתכונות העוקב $\gamma \leq \alpha$. מש"ל.