ב"ש אנליזה 1 תשעז מועד ג

1. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x) = \frac{x^3}{\sin^2(x)+x^2}$

פתרון: הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=0$ בלבד. נחשב אסימטוטה אנכית (אם קיימת) באיזור

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\sin^2(x)+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{x}{\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2+1\right)} = \frac{0}{1^2+1} = 0$$

וכמו כן $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ בחישוב דומה.

אסימטוטות אופקיות, אם קיימות:

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{\sin^2(x)+x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{x}{\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2+1\right)} = \frac{\infty}{0^2+1} = \infty$$

ו

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{\sin^2(x)+x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{x}{\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2+1\right)} = \frac{-\infty}{0^2+1} = -\infty$$

(ב) $g(x) = e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}$

פתרון: הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=0$ בלבד. נחשב אסימטוטה אנכית (אם קיימת) באיזור

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = \{e^{-\frac{1}{0^+}} = \frac{1}{e^{\infty}}\} = 0$$

וכמו כן

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = \{e^{-\frac{1}{0^-}} = e^{\infty}\} = \infty$$

אסימטוטות אופקיות, אם קיימות:

$$\lim_{x\to \infty} g(x) = \lim_{x\to \infty} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

ובאופן דומה גם

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

(ג) $h(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

פתרון: הפונקציה $h(x)$ אינה מוגדרת עבור $x \leq 0$ ועבור $x = 1$ בלבד. נחשב אסימטוטה אנכית (אם קיימת) באיזור

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = \{\frac{1}{-\infty}\} = 0$$

וגם

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln(x)} = \{\frac{1}{0^+}\} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln(x)} = \{\frac{1}{0^-}\} = -\infty$$

אסימטוטות אופקיות, אם קיימות:

$$\lim_{x\to \infty} h(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\ln(x)} = \{\frac{1}{\infty}\} = 0$$

2. פתרו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} f = x & g' = \cos(x) \\ f' = 1 & g = \sin(x) \end{array} \right\} = x\sin(x)|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \cos(x)|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(ב) $\int \ln\left(x^2 - x - 6\right)\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int \ln\left(x^2 - x - 6\right)\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} f = \ln\left(x^2 - x - 6\right) & g' = 1 \\ f' = \frac{2x-1}{x^2-x-6} & g = x \end{array} \right\} = x\ln\left(x^2 - x - 6\right) - \int \frac{2x-1}{x^2-x-6} \cdot x\mathrm{d}x$$

ונמשיך לחשב רק

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x-6} \cdot x\mathrm{d}x$$

נעשה חילוק פולינומים

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad 2 \\ \hline x^2 - x - 6 & \; 2x^2 \;\; - x \\ & -2x^2 + 2x + 12 \\ \hline & \quad\quad x + 12 \end{array}$$

וקיבלנו ש $2x^2 - x = 2\left(x^2 - x - 6\right) + (x + 12)$ ולכן

$$\frac{2x^2 - x}{x^2 - x - 6} = \frac{2\left(x^2 - x - 6\right) + (x + 12)}{x^2 - x - 6} = 2 + \frac{x + 12}{x^2 - x - 6} = 2 + \frac{x + 12}{(x - 3)(x + 2)}$$

ולפי פירוק של שברים חלקיים, קיימים קבועים A, B כך ש

$$\frac{x + 12}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$$

ובעזרת מכנה משותף נקבל

$$x+12=A\left(x+2\right)+B\left(x-3\right)$$

נציב $x=-2$ לקבל ש $-5B=10$ ולכן $B=-2$ ונציב $x=3$ לקבל $5A=15$ ולכן $A=3$. בסה"כ נקבל

$$\begin{aligned}\int\ln\left(x^2-x-6\right)\mathrm{d}x&=x\ln\left(x^2-x-6\right)-\int\frac{2x-1}{x^2-x-6}\cdot x\mathrm{d}x\\&=x\ln\left(x^2-x-6\right)-\int 2+\frac{3}{x-3}+\frac{-2}{x+2}\mathrm{d}x\\&=x\ln\left(x^2-x-6\right)-\left(2x+3\ln|x-3|-2\ln|x+2|\right)+C\end{aligned}$$

(ג) $\int\frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בהצבה

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}t=e^x\\ \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}x$$

וכיוון ש t^2+t+1 אי פריק, נעשה השלמה לריבוע

$$\int\frac{1}{t^2+t+1}=\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t=\frac{1}{3/4}\int\frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3/4}}{3/4}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)+C$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{e^x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)+C$$

3. נביט בפונקציה

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

(א) הוכיחו כי

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}$$

(רמז: כפל בצמוד).

פתרון: נחשב:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x+1-x}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{x+1-x}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}
\end{aligned}$$

ולכן

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}$$

כנדרש.

(ב) מצאו את המקסימום של $f(x)$ בתחום $[1,\infty)$. האם יש לה שם מינימום?
פתרון: כיוון ש $\sqrt{x}, \sqrt{x+1}$ פונקציות עולות אז

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}$$

פונקציה יורדת (כי המכנה פונקציה עולה). לכן ערך המקסימום שלה מתקבל ב 1 והוא

$$f(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}\left(\sqrt{1+1}+\sqrt{1}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$$

בנוסף, לפונקציה אין ערך מינימום כי לכל x מתקיים ש $f(x) > f(x+1)$ ולכן $f(x)$ אינו מינימום.

4. תהא f גזירה פעמיים ב $\mathbb{R}$ ובנוסף $f(0)=0, f(1)=2, f(2)=1$.

(א) הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,2)$ כך ש $f'(c)=0$.
פתרון: הפונקציה f רציפה ב $[0,2]$ כי גזירה שמה ולכן לפי משפט ויירשטארס מקבלת ערך מקסימלי M. כיוון שערך זה לא מתקבל בקצוות (שהרי $f(1)$ גדול מ $f(0), f(2)$) נסיק שנקודת המקסימום נמצאת ב $(0,2)$ ולכן הנגזרת שלה שווה 0.

(ב) הוכיחו שקיימת נקודה $d\in(0,2)$ כך ש $f''(d)<0$.
פתרון: נב"ש שלכל $d\in(0,2)$ מתקיים $f''(d)\geq 0$ אזי f' עולה בקטע $(0,2)$. לכן בקטע $(c,2)$ מתקיים $f'\geq 0$ מה שגורר ש f עולה בקטע זה. אבל c היתה נקודה מקסימום בקטע $(c,2)$ הפונקציה קבועה על הערך המקס' $f(c)$. מכיוון ש רציפה ב $[c,2]$ נקבל שגם הערך $f(c)=f(2)$ אבל $f(2)=1<2=f(1)\leq f(c)$ סתירה.

5. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? הוכיחו שהיא אכן גזירה אז.

פתרון: על מנת ש f תהיה גזירה ב $x=0$ היא צריכה להיות רציפה שמה. נבדוק לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$. על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

כאפסה כפול חסומה ולכן רק עבור $a=0$ היא תהיה רציפה. כעת נבדוק האם f רציפה ב $x=0$ עבור $a=0$: לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

כאפסה כפול חסומה ולכן רק עבור $a=0$ היא תהיה גם רציפה וגם גזירה ב $x=0$ ומתקיים $f(0)=0, f'(0)=0$.

(ב) האם $f'(x)$ רציפה ב $x=0$?

פתרון: לפי חישוב קודם:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

על מנת שהפונקציה f' תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f('0)$$

נחשב

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ואם גבול זה היה קיים ושווה ל $f'(0)=0$ היינו מקבלים ש

$$\lim_{x\to 0}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

שהרי $\lim_{x\to 0}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (כאפסה כפול חסומה) ו $\lim_{x\to 0}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ הוא הפרש של שתי אפסות. אבל: $\lim_{x\to 0}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\neq 0$ שהרי עבור $a_n=\frac{1}{2\pi n}\to 0$ מתקיים

$$-\cos\left(\frac{1}{a_n}\right)=-\cos\left(2\pi n\right)=-1\not\to 0$$

סתירה. לכן $f'(x)$ אינה רציפה ב $x=0$ (הערה: עבור $a\neq 0$ הפונקציה $f'(0)$ כלל לא מוגדר ולכן לא התייחסנו למקרים אלו בפתרון).