מגדירים את הפרמטר של החלוקה $\lambda(P) = \max\limits_{1\leq k\leq n} \Delta t_k$

האינטגרל $\int_a^b t(t)\,\mathrm{d}x$ מוגדר להיות הגדול כאשר $\lambda(P)\to 0$ של סכומי רימן.

כבר הוכחנו

$$\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [x(t)+iy(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t$$

בתנאי ש$x(t)$ ו$y(t)$ שתיהן אינטגרביליות. למשל, אם שתיהן רציפות למקוטעין ב$[a,b]$

משפט 1(בקיצור)

1. $\int_a^b (z(t)\pm w(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t \pm \int_a^b w(t)\,\mathrm{d}t$
2. אם c קבוע מרוכב, $\int_a^b cz(t)\,\mathrm{d}t = c\int_z^b z(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\left|\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |z(t)|\,\mathrm{d}t$
4. אם $z'(t)$ רציפה ב$[a,b]$, $\int_a^b z'(t)\,\mathrm{d}t = z(b)-z(a)$(נוסחת נייטון ליבניץ במרוכבים)
5. אם $z'(t)$ רציפה ב$[a,b]$ אורך המסילה $z=z(t)$, $a\leq t\leq b$ הוא $\int_a^b |z'(t)|\,\mathrm{d}t$

אינטגרלים של משתנים מרוכבים

הסוג השני של אינטגרלים הם אינטגרלים מהצורה

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z$$

כאשר $f(z)$ פונקציה מרוכבת של משתנה מרוכב.

מוסכם שהוא אינטגרל מסילתי, ז"א האינטגרל מחושב על איזה מסילה γ במישור.

$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ כאשר $f(z)$ מוגדרת ורציפה למקוטעין על γ.

כדי להגדיר את האינטגרל נעשה חלוקה P של γ ע"י נקודות $z_0, z_1, ...z_n$ שהולכות בכיוון הנתון של γ מתחילתה עד סופה.

סכום רימן יוגדר ע"י $\sum\limits_{k=1}^{n} f(z_k')\,\Delta z_k$ כאשר לכל k, z_k' נקודה בγ בין z_{k-1} לz_k, ו$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

עוד נגדיר: $\lambda(P) = \max\limits_{1\leq k\leq n} |\Delta z_k|$

אם קיים $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}$ לסכום של כל סכומי רימן, אז אותו גבול הוא $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$

חישוב בפועל של האינטגרל

נתאר את γ ע"י פרמטריזציה $\begin{matrix} z=z\left(t\right)=x\left(t\right)+iy\left(t\right) \\ a\le t\le b \end{matrix}$ ונניח שהמסילה "חלקה", ז"א $z'\left(t\right)$ קיימת ורציפה ב$[a,b]$.

נעשה חלוקה P של $[a,b]$, $a=t_0<t_1<...<t_n=b$. היא משרה חלוקה של γ ע"י הנקודות $z_0,z_1,...z_n$ כאשר לכל k $z_k=z\left(t_k\right)$.

לפי זה סכום רימן לאינטגרל $\int_\gamma f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$ שהוא $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(z_k'\right)\Delta z_k$ יכול להתפרש כסכום

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(z\left(t_k'\right)\right)\left[z\left(t_k\right)-z\left(t_{k-1}\right)\right]$$

כאשר לכל k $t_{k-1}\le t_k'\le t_k$.

נעיין בביטוי בסוגריים

$$z\left(t_k\right)-z\left(t_{k-1}\right)=x\left(t_k\right)+iy\left(t_k\right)-\left[x\left(t_{k-1}\right)+iy\left(t_{k-1}\right)\right]=$$

$$=x\left(t_k\right)-x\left(t_{k-1}\right)+i\left[y\left(t_k\right)-y\left(t_{k-1}\right)\right]=$$

$$=\left[\frac{x\left(t_k\right)-x\left(t_{k-1}\right)}{t_k-t_{k-1}}+i\frac{y\left(t_k\right)-y\left(t_{k-1}\right)}{t_k-t_{k-1}}\right]\left(t_k-t_{k-1}\right)$$

על פי משפט לגרנג' מאינפי זה שווה

$$\left(x'\left(t_k''\right)+iy'\left(t_k'''\right)\right)\left(t_k-t_{k-1}\right)$$

כאשר לכל k, $t_k'',t_k'''\in\left[t_{k-1},t_k\right]$.

כעת נתון ש$x'\left(t\right)$ ו$y'\left(t\right)$ רציפות ב$[a,b]$. לכן, כאשר $\lambda\left(P\right)$קטן, הקטע $\left[t_{k-1},t_k\right]$ מאוד קטן והטעות "זניחה", הביטוי האחרון שווה

$$\left[x'\left(t_k'\right)+iy'\left(t_k'\right)\right]\left(t_k-t_{k-1}\right)$$

אם כן, סכום רימן

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(z\left(t_k'\right)\right)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n} f\left(z\left(t_k'\right)\right)\left[x'\left(t_k'\right)+iy'\left(t_k'\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f\left(z\left(t_k'\right)\right)z'\left(t_k'\right)\underbrace{\left(t_k-t_{k-1}\right)}_{\Delta t_k}$$

זה סכום רימן עבור אינטגרל מסוג ראשון. כאשר $\lambda\left(P\right)\to 0$ הוא שואף לאינטגרל $\int_a^b f\left(z\left(t\right)\right)$ והוא שווה $\int_\gamma f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$.

דרך פורמלית

נתון $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$. נבנה פרמטריזציה ל$\gamma$:

$$z = z(t) \qquad a \le t \le b$$

אז $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z'(t)$. פורמלית $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$ ונציב:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \underbrace{f(z(t))}_{f(z)}\underbrace{z'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}z}$$

דוגמאות חישוב

1. נחשב $\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$ כאשר γ היא קשת מעגל היחידה מ1 עד $e^{\mathrm{i}\pi/3}$

פתרון: תחילה יש להמציא פרמטריזציה לγ. כאן γ היא קשת מעגל היחידה, הוא $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$, ז"א ב$\gamma$

$$z = re^{i\theta} = 1e^{i\theta} = e^{i\theta}$$

לכן γ מתוארת ע"י

$$z(\theta) = e^{i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le \pi/3$$

לפי זה

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = ie^{i\theta}$$

$$\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\bar{z} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

נחזור לאינטגרל

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/3} \underbrace{e^{-i\theta}}_{\bar{z}}\underbrace{ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}z} = \int_0^{\pi/3} i\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\pi/3$$

2. נגדיר את γ_1 בתור קטע הישר מ1 עד $e^{\mathrm{i}\pi/3}$. נחשב $\int_{\gamma_1} \bar{z}\,\mathrm{d}z$

פתרון: תחילה צריכים להמציא פרמטריזציה לγ_1. יש בזה כלל: הקטע הישר שהולך מz_1 עד z_2 ב$\mathbb{C}$ נתון ע"י

$$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)\,t \qquad 0 \le t \le 1$$

הסבר: לפי הנוסחה

$$z\left(0\right)=z_1+\left(z_2-z_1\right)0=z_1$$

$$z\left(1\right)=z_1+\left(z_2-z_1\right)0=z_2$$

והפונקציה לינארית בt, ולכן זה מגדיר קטע ישר מz_1 לz_2.
בתרגיל שלנו, γ_1 הולך מ1 עד $e^{\mathrm{i}\pi/3}$ בקטע ישר. לכן היא נתונה ע"י

$$z\left(t\right)=1+\left(e^{\mathrm{i}\pi/3}-1\right)t \qquad 0\le t\le 1$$

לפי זה,

$$\bar{z}\left(t\right)=1+\left(e^{-\mathrm{i}\pi/3}-1\right)t$$

$$\mathrm{d}z=\left(e^{\mathrm{i}\pi/3}-1\right)\,\mathrm{d}t$$

לכן

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z=\int_0^1\underbrace{\left[1+\left(e^{-\mathrm{i}\pi/3}-1\right)t\right]}_{\bar{z}}\underbrace{\left(e^{\mathrm{i}\pi/3}-1\right)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}z}=$$

$$=\left(e^{\mathrm{i}\pi/3}-1\right)\int_0^1\left[1+\left(e^{-\mathrm{i}\pi/3}-1\right)t\right]\,\mathrm{d}t=$$

$$=\left(e^{\mathrm{i}\pi/3}-1\right)\left[t+\left(e^{-\mathrm{i}\pi/3}-1\right)\frac{t^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=\left(e^{\mathrm{i}\pi/3}-1\right)\left(1+\frac{e^{-\mathrm{i}\pi/3}-1}{2}\right)$$

הערה

לכל מסילה יש ∞ פרמטריזציות.
למשל: מעגל היחידה מתואר נגד כיוון השעון ע"י

$$z\left(\theta\right)=e^{i\theta}, \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

אבל הוא גם מתואר על ידי

$$z\left(\theta\right)=e^{2i\theta}, \qquad 0\le\theta\le \pi$$

או

$$z\left(t\right)=\begin{cases}t+i\sqrt{1-t^2} & -1\le t\le 1\\ t-i\sqrt{1-t^2} & -1\le t\le 1\end{cases}$$

3. **שאלה:** האם האינטגרל $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ תלוי בפרמטריזציה של γ?

תשובה: ודאי שלא! כי הגדרנו את $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ כגבול של סכומי רימן מבלי להזכיר פרמטריזציה. הפרמטריזציה הובאה רק כמכשיר לחשב את האינטגרל. לכן באופן אוטומטי האינטגרל ב"ת בפרמטריזציה.

אמנם יש ספרים שמגדירים $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ בעזרת פרמטריזציה

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \equiv \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t$$

ואז הם מוכיחים משפט האומר שערך האינטגרל ב"ת בפרמטריזציה של γ.

משפט 2(תכונות האינטגרל)

נניח שγ היא מסילה חלקה במישור, $f(z)$ ו$g(z)$ מוגדרות ורציפות למקוטעין בγ, ו$c \in \mathbb{C}$ קבוע מרוכב. אזי:

1. $\int_\gamma [f(z) \pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$
2. $\int_\gamma cf(z)\,\mathrm{d}z = c\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$
3. $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ כאשר $-\gamma$ היא המסילה γ מתוארת בכיוון ההפוך
4. אם $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
5. $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le ML$ כאשר $M = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$ ו$L = |\gamma|$ (האורך של γ)

הוכחה

אפשר להוכיח את כל הסעיפים או ע"י סכומי רימן או ע"י פרמטריזציה.
כאן נוכיח את (1) ו(2) בעזרת פרמטריזציה: γ נתונה ע"י $z = z(t)\,, a \le t \le b$:

1. $\int_\gamma (f \pm g)(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b (f \pm g)(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t$. זה אינטגרל מסוג ראשון. ע"פ משפט 1 הוא לינארי, ולכן האינטגרל האחרון שווה

$$\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t \pm \int_a^b g(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$$

2. דומה ל(1)

$$\int_\gamma cf(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b cf(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t = c\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t = c\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

3. נוכיח באמצעות סכום רימן. עבור $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ הוא סכום מהסוג

$$\sum_{k=1}^{n} f(z'_k)\,\Delta z_k = f(z'_1)(z_1-z_0)+f(z'_2)(z_2-z_1)+...+f(z'_{n-1})(z_{n-1}-z_{n-2})+f(z'_n)(z_n-z_{n-1})$$

"מינוס" סכום זה נתון ע"י

$$f(z'_n)(z_{n-1}-z_n)+f(z'_{n-1})(z_{n-2}-z_{n-1})+...+f(z'_1)(z_0-z_1)$$

שזה בדיוק סכום רימן עבור $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$. בגבול, כאשר $\lambda(P)\to 0$, נקבל $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$

4. נעשה חלוקה P של γ_1 וחלוקה Q של γ_2. האיחוד שלהם הוא $R=P\cup Q$ חלוקה ל-γ.

כעת, אם S_P הוא סכום רימן בנוי על P עבור $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ ו-S_Q סכום רימן בנוי על Q עבור $\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$. אז S_P+S_Q הוא סכום רימן עבור $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, והוא בנוי על R. נקרא לו S_R. ז"א $S_R=S_P+S_Q$.

כעת, כאשר $\lambda(P)\to 0$ וגם $\lambda(Q)\to 0$ אוטומטית $\lambda(R)\to 0$ ונקבל

$$\lim_{\lambda(R)\to 0} S_R = \lim_{\lambda(R)\to 0} S_p + \lim_{\lambda(Q)\to 0} S_Q$$

זאת אומרת

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

5. סכום רימן ל-$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ הוא סכום מהסוג $S_R=\sum\limits_{k=1}^{n} f(z'_k)\,\Delta z_k$, לכן

$$|S_R| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(z'_k)(z_k-z_{k-1})\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(z'_k)|\,|z_k-z_{k-1}| \le \sum_{k=1}^{n} M\,|z_k-z_{k-1}| = M\sum_{k=1}^{n}|z_k-z_{k-1}| = ML$$

הוכחנו ש<u>לכל סכום רימן</u> $|S_R|\le ML$, אז גם בגבול שלהם $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \lim|S_R| \le ML$

מש"ל

הכללות

1. אם $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(z)$ אז

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_\gamma f_k(z)\,\mathrm{d}z$$

(וזאת הכללה של (1) ו(2) ביחד)

2. אם $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_n$ אזי

$$\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

ההוכחה של 1 ו2 באינדוקציה

משפט 3

תהי γ מסילה ב$\mathbb{C}$ שהולכת מz_1 עד z_2. תהי $f\left(z\right)$ פונקציה מוגדרת ובעלת נגזרת רציפה $f'\left(z\right)$ לאורך γ. אז:

$$\int_{\gamma}f'\left(z\right)\,\mathrm{d}z=f\left(z_2\right)-f\left(z_1\right)$$

הוכחה

לפי הנתון γ מתוארת א"י $b\leq t\leq a,\ z=z\left(t\right)$ כאשר $z'\left(t\right)$ קיימת ורציפה ב$[a,b]$ ו$z\left(a\right)=z_1$ ו$z\left(b\right)=z_2$.

כעת:

$$\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f'\left(z\left(t\right)\right)z'\left(t\right)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(z\left(t\right)\right)\,\mathrm{d}t=f\left(z\left(t\right)\right)\Big|_a^b=f\left(z\left(b\right)\right)-f\left(z\left(a\right)\right)=f\left(z_2\right)-f\left(z_1\right)$$

מסקנה 1

תהי γ מסילע חלקה ב$\mathbb{C}$. תהי $f\left(z\right)$ מוגדרת ורציפה בγ ונניח שקיימת לf פונקציה קדומה $F\left(z\right)$ לאורך γ.

כעת, אם γ הולכת מz_1 עד z_2, אזי

$$\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=F\left(z_2\right)-F\left(z_1\right)$$

הוכחה

לפי הנתון לכל z בγ $F'\left(z\right)=f\left(z\right)$, לכן

$$\int_{\gamma}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma}F'\left(z\right)\,\mathrm{d}z=F\left(z_2\right)-F\left(z_1\right)$$

מסקנה 2

תהי γ ב$\mathbb{C}$ מסילה חלקה וסגורה. תהי $f(z)$ מוגדרת ורציפה בγ ובעלת פונקציה קדומה $F(z)$ לאורך γ. אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

הוכחה

ניקח נקודה כלשהי z_1 בγ. אפשר להסתכל על γ כמסילה מz_1 עד z_1. לפי מסקנה 1,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_1) = 0$$

מ.ש.ל.

דוגמאות חישוב

1. נחשב $\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z$ כאשר γ מסילה הנתונה ע"י

$$z(t) = t^2\cos(t) + it\sin\left(t^2\right), \qquad 0 \le t \le \pi$$

תשובה

$$z(0) = 0$$

$$z(\pi) = -\pi^2 + i\pi\sin\pi^2$$

ז.א., γ הולכת מ$z_1 = 0$ עד $z_2 = -\pi^2 + i\pi\sin\left(\pi^2\right)$. ע"פ משפט 3 מסקנה 1

$$\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z = \left.\frac{z^3}{3}\right|_{z_1}^{z_2} = \frac{\left(-\pi^2 + i\pi\sin\left(\pi^2\right)\right)}{3} - 0$$

2. (ממבחן) γ מורכבת מהקטע מ0 ל1, משם דרך קשת של מעגל היחידה לi, ומשם בקטע חזרה ל0. צריך לחשב $\int_\gamma z^n\bar{z}\,\mathrm{d}z$ כאשר $n \in \mathbb{N}$.

תשובה

אף על פי שγ סגורה, לא נוכל לאפס את האינטגרל, כי לא ידועה לנו פונקציה קדומה ל$z^n\bar{z}$(ואפשר להוכיח שלא קיימת פונקציה קדומה).

רוב הסטודנטים שהצליחו במבחן פירקו את γ ל$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ וחישבו $\int_{\gamma_k} z^n\bar{z}\,\mathrm{d}z$ ע"י פרמטריזציה אחרת לכל $k = 1, 2, 3$. אבל יש דרך יותר קלה:

דרך המלך

γ_1 הוא קטע ממשי. שים $z = \bar{z}$, לכן

$$\int_{\gamma_1} z^n \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} z^{n+1}\,\mathrm{d}z = \left.\frac{z^{n+2}}{n+2}\right|_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

על γ_2, $z\bar{z} = 1$, $\bar{z} = {}^1\!/\mathrm{z}$ לכן

$$\int_{\gamma_2} z^n \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} z^{n-1}\,\mathrm{d}z = \left.\frac{z^n}{n}\right|_1^i = \frac{i^n}{n} - \frac{1}{n}$$

על γ_3 $\bar{z} = -z$ ולכן

$$\int_{\gamma_3} z^n \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_3} -z^{n+1}\,\mathrm{d}z = -\left.\frac{z^{n+2}}{n+s}\right|_i^0 = \frac{i^{n+2}}{n+2}$$

תשובה סופית:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{i^n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{i^{n+2}}{n+2}$$