**חוגים – תרגיל בית 2**

1. יהי חוג במטריצות הריבועיות מגודל nxn מעל חוג R.
   1. הוכיחו שיש התאמה בין אידאלים (דו צדדיים) של החוג R לאידאלים הדו-צדדיים של חוג המטריצות. הסיקו כי בחוג המטריצות מעל שדה אין אידאלים לא טריוויאליים.
   2. האם הטענה נכונה גם עבור אידאלים חד צדדיים? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה לאידאל חד צדדי בחוג מטריצות מעל שדה.
2. יהי R חוג קומוטטיבי.
   1. הוכיחו שאם I,J אידאלים קו-מקסימליים, כלומר הסכום שלהם שווה לכל החוג, אזי המכפלה שלהם שווה לחיתוך שלהם. הפריכו במקרה שהם לא קו-מקסימליים.
   2. האם התנאי הכרחי? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
   3. האם סעיף א נכון גם כשהחוג לא קומוטטיבי? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.
3. הוכיחו שבחוג המנה של חוג R באידאל הנילפוטנטים אין איברים נילפוטנטיים.
4. יהי R תחום שלמות ראשי, כלומר כל האידאלים בו נוצרים ע"י איבר אחד. הוכיחו כי אם אידאלים, אז היוצר של J מחלק את היוצר של I.
5. יהי :f הומומורפיזם של חוגים עם יחידה. הוכיחו ש:
   1. אם הפיך, אז f(x) הפיך ומקיים
   2. אם נילפוטנט, אז f(x) נילפוטנט ומקיים שדרגת הנילפוטנטיות שלו קטנה או שווה לזו של x. האם היא חייבת לחלק את דרגת הנילפוטנטיות של x?
   3. אם f על אז
6. (רשות) יהי חוג הפולינומים בn משתנים מעל שדה סגור אלגברית F.יהי סכום ישר של n עותקים של F. נגדיר עבור קבוצה את להיות ה-n-יות שהצבתן בתור המשתנים מאפסת את כל הפולינומים בקבוצה A.
   1. הוכיחו שלכל A, (כאשר <A> האידאל שנוצר ע"י A).
   2. נגדיר עבור את להיות האידאל שנוצר ע"י כל הפולינומים שמאפסים את כל ה-n-יות ב-B. האם בהכרח ? אם לא, אז מתי כן מתקיים שיוויון?