

## אלגברה מופשטת 3 – חבורות גלואה – 02

1. מצאו את התאמת גלואה בין שדות הביניים של  $E/\mathbb{Q}$  לבין תת-החבורות של  $Gal(K/\mathbb{Q})$  כאשר  $E$  שדה הפיצול של  $x^3 - 3$  (ציירו את הדיאגרמות של תת-החבורות ושדות הביניים). ציינו מי הם שדות הביניים  $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq K$  כך ש  $F/\mathbb{Q}$  הרחבת גלואה.
2. יהי  $f(x) = x^6 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ . מצאו את חבורת גלואה של שדה הפיצול ואת היוצרים של החבורה (כאוטומורפיזמים הפועלים על השורשים).
3. מצאו את חבורת גלואה ואת שדות הביניים של  $\mathbb{Q}[\rho_7]/\mathbb{Q}$ .
4. נניח שהרחבת גלואה  $K/F$  בעלת חבורת גלואה  $D_7$ . מצאו את מספר הרחבות הביניים, ואת מספר הרחבות הביניים שהן הרחבות גלואה של  $F$ .
5. חשבו את התאמת גלואה (חבורת גלואה, שדות ביניים, שדות ביניים שהן הרחבות גלואה של  $\mathbb{Q}$ ) של הפולינום  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ .
6. הוכיחו או הפריכו: אם  $K$  שדה הפיצול של פולינום ספרבילי אי-פריק ממעלה  $n$  מעל  $F$  אז ב- $Gal(K/F)$  יש איבר מסדר  $n$ .
7. יהי  $f(x) \in F[x]$  פולינום אי-פריק, ו- $E/F$  שדה הפיצול שלו. נניח ש- $Gal(E/F) = S_p$  עבור  $p$  ראשוני. הוכיחו שאם  $H \triangleleft S_p$ ,  $\{id\} \neq H$ , אזי הפולינום  $f(x)$  אי-פריק מעל  $E^H$ .
8. (\*) יהי  $f(x) \in F[x]$  מדרגה  $n$  ו- $F$  עם מאפיין 0. נגדיר  $\Delta = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)$  כאשר  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  הם שורשי  $f(x)$ . הדיסקרימיננטה של  $f(x)$  היא  $D = \Delta^2$ . הראו:
  - i.  $D \in F$  (כיצד פועלת  $Gal(E/F)$  על  $D$  כאשר  $E$  שדה הפיצול של  $f(x)$ ).
  - ii. נניח ש  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  אי-פריק מדרגה 3. הראו ש- $D$  אינו ריבוע ברציונליים אם ורק אם יש לפולינום שורש ממשי יחיד.
  - iii. הסיקו שאם  $D$  אינו ריבוע ברציונליים עבור  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  אי-פריק מדרגה 3 אזי  $Gal(E/F) \cong S_3$ .