תרגול 10 – טופולוגיה

**בסיסים**

הגדרה: יהי  מרחב טופולוגי. משפחה  של קבוצות פתוחות ב- נקראת **בסיס לטופולוגיה** של  אם כל קבוצה פתוחה ב- היא איחוד של קבוצות מ-.

הגדרה שקולה:  הוא בסיס לטופולוגיה אם:

1.  הוא אוסף של קבוצות פתוחות;
2. לכל קבוצה פתוחה  ולכל  קיימת  כך ש-.

**תרגיל**

תהי  קבוצה אינסופית. נגדיר משפחה של קבוצות: . הוכיחו ש- היא בסיס לטופולוגיה הקו-סופית על .

פתרון

על מנת להוכיח ש- בסיס, יש להראות שני תנאים:

1.  הינו אוסף של קבוצות פתוחות:

קל לראות מהגדרת  ומהגדרת הטופולוגיה הקו-סופית.

1. נוכיח לפי הקריטריון השקול. תהי  ויהי . נוכיח שקיימת  כך ש- . מכיוון ש-נקבל ש- ומכיוון ש- אינסופית, נקבל ש-  אינסופית ולכן יש בה לפחות 1001 נקודות שונות מ-. כלומר, . אזי נגדיר . מתקיים  ולכן  סופית כאיחוד של שתי סופיות ובנוסף . כמו כן ברור שמתקיים .

מש"ל

הערה

ראיתם בכיתה שאם  פונקציה, ואם  הוא בסיס ל-, אזי  רציפה  לכל  מתקיים ש- פתוחה ב-.

**טענה**

נתבונן בהגדרה:  לכל סביבה  מתקיים .

נוכיח שלמעשה מספיק לבדוק רק עבור קבוצות פתוחות בסיסיות. זאת אומרת:

 לכל סביבה בסיסית  מתקיים .

הוכחה

:תהי  סביבה של , לאו דווקא בסיסית. מכיוון ש- בסיס, קיימת  עבורה . מתקיים .

: טריוויאלי.

מש"ל

תזכורת: תהי  קבוצה ו-.  הוא בסיס לטופולוגיה על  אמ"מ:

1. ;
2. אם  אזי  עבור  כלשהו.

(הטופולוגיה מוגדרת באמצעות איחודים של קבוצות מ-.)

**תרגיל**

נאמר שמרחב טופולוגי הוא ממימד אפס אם קיים בסיס לטופולוגיה המורכב מקבוצות סגוחות.

1. הוכיחו כי  בסיס לטופולוגיה  על .
2. הראו ש- מטריזבילי וממימד אפס.

פתרון

1. מתקיים , ולכן ברור שאיחוד כל הקבוצות של  יתן את כל המרחב. נעבור לתכונה השניה: יהיו  ונניח בה"כ כי . אזי מתקיים . לכן הטענה ברורה.
2. המרחב  מטריזבילי על-ידי המטריקה ה-5 אדית. בדקו שלכל מתקיים .

[הסבר: אתם מוכיחים בש"ב שכדי שטופולוגיה אחת תהיה מוכלת בטופולוגיה שניה מספיק שהבסיס יהיה מוכל בטופולוגיה. במקרה זה בעצם יש אותו בסיס לשתי הטופולוגיות ולכן הן חייבות להתלכד. בשוויון הנ"ל הביטויים מימין הם בסיס לטופולוגיה שלנו והביטויים משמאל הם בסיס בכל מ"מ ובפרט במ"מ עם המטריקה 5-אדית.]

לגבי מימד אפס: ראינו שמתקיים .

מש"ל

**מרחבי מכפלה**

יהיו מרחבים טופולוגיים. נתבונן במרחב המכפלה . נגדיר בסיס למרחב טופולוגי זה:. אזי  הוא בסיס לטופולוגיה על  הנקראת **טופולוגיית המכפלה**.

**למה** (תוכיחו בבית!)

יהי  בסיס ל- ויהי  אזי:  בסיס ל- אמ"מ (\*) לכל  ולכל  קיימת  כך ש-.

**טענה (בסיס למכפלה)**

יהיו  מרחבים טופולוגיים ויהיו  הבסיסים המתאימים. אזי אוסף כל הקבוצות מהצורה  הוא בסיס לטופולוגיית המכפלה על .

הוכחה

כזכור, בסיס לטופולוגיית המכפלה הוא . ברור ש- מוכל ב- כי . לכן ניתן להשתמש בלמה. כלומר, תהי  ויהי . נראה שקיימת  כך ש-. לכל  וכמו כן  בסיס ל- ולכן קיימת  כך ש-. תהי  ומתקיים .

מש"ל

**תרגיל**

יהיו מ"ט ונניח ש- האוסדורף. יהיו רציפות.

1. הוכיחו שהאלכסון סגור ב-.
2. הסיקו שהקבוצה סגורה ב-.
3. נניח שקיימת צפופה ב- כך ש-. הוכיחו ש-.
4. האם קיימת פונקציה רציפה  השונה מ- כך שלכל  מתקיים ?

פתרון

1. נניח ש-האוסדורף ונראה שהאלכסון  סגור ב-. נניח בשלילה שקיימת כך ש-. עפ"י הגדרת האלכסון נקבל . מכיוון ש-האוסדורף קיימות סביבותזרות של  בהתאמה. אבל אז נקבל ש-סביבה של  ומתקיים  (אחרת קיים  ונקבל ש- אינן זרות). מכאן  וזו כמובן סתירה להנחה.
2. לפי א' האלכסון  סגור בטופולוגיית המכפלה. כעת נגדיר  ע"י . נשתמש במשפט שאומר ש- רציפה אמ"מ ההרכבה עם ההטלות היא רציפה, ואכן  הן רציפות לפי הנתון. לכן  היא סגורה כתמונה הפוכה של סגורה. אבל מתקיים , ולכן  סגורה ב-.
3. מהגדרת הקבוצה  נקבל ש-.

מתקיים , שכן  סגורה (לפי סעיף ב'). אך מכיוון ש- נקבל ש- והוכחנו הדרוש.

1. לא. נניח בשלילה שקיימת  כזו ונתבונן ב-. מתקיים . כעת,  רציפות,  צפופה ב-וכן  האוסדורף. מכאן, עפ"י הסעיף הקודם  לכל . בסתירה להנחה.

מש"ל

**תרגיל**

יהימ"ט ונקודון כלשהו ,אזי .

פתרון

 רציפה כפונקציית ההטלה ממרחב מכפלה.הפונקציה  היא ההופכית של  וכמו כן  רציפה עפ"י קריטריון רציפות למרחב מכפלה- ברכיב הראשון מדובר בפונקציית הזהות הרציפה וברכיב השני בפונקציה קבועה שתמיד רציפה.

מש"ל

**מסקנה**

יהיו מ"ט ו- אזי:קומפקטי אם ורק אם  קומפקטי.

תכונה זו נשמרת על-ידי הומיאומורפיזם ובכלל על-ידי פונקציה רציפה ועל. כמו כן אותה טענה תקפה אם נחליף קומפקטי בקשיר או בקשיר מסילתית מסיבות דומות.