תרגיל 4

1. תהי $A = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עבור $p \notin \mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{B \subseteq A : |B^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה.

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגוחה. הוכיחו כי X סופית.

   (ב) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X. האם (X, τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

3. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל איבר)

4. נגדיר על $\mathbb{N}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

   (א) הוכיחו כי $(\mathbb{N}, \tau)$ אכן מרחב טופולוגי.

   (ב) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{N}$.

5. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקוסופית עליה. תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו שלכל $x \in X$, $x_n \to x$.