פתרון בוחן במבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תש"ף

מתרגל: גלעד פורת קורן.

הוראות נא לכתוב בעט כחול או שחור.
כתבו שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק.
משך הבוחן: 90 דקות.
ציון מקסימלי: 100.
אין חומר עזר.

שאלה 1. (35 נק') תהי $\sigma = (15)(12)(19) \in S_9$.

א. מהם הסימן, הסדר וההופכית של σ?

ב. מצאו את $\langle\sigma\rangle$. האם זו ת"ח נורמלית של S_9?

ג. תהי H ת"ח לא נורמלית של חבורה G מסדר 34. מהו הסדר של H? (אין קשר לסעיפים הקודמים)

פתרון.

א. תחילה נחשב את ההרכבה: $\sigma = (1925)$. לכן $sign(\sigma) = (-1)^{4-1} = -1$ (כמו בכל מחזור מאורך זוגי. ניתן לחשב את הסימן גם לפני ההרכבה הודות לכפליות הסימן).
כיוון ש-σ היא מחזור מאורך 4, $o(\sigma) = 4$.
נובע מכך ש- $\sigma^4 = id$ ולכן $\sigma^{-1} = \sigma^3$.
נחשב ונקבל: $(12)(59) = \sigma^2$ ו-$\sigma^3 = (1529)$ ולכן $\sigma^{-1} = (1529)$.

ב. $\langle\sigma\rangle = \{id, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} = \{id, (1925), (15)(29), (1529)\}$.
שימו לב ש-σ^{-1} וכל שאר החזקות השלמות של σ אכן בפנים.
זו לא ת"ח נורמלית של S_9 כי אינה סגורה להצמדה. נדגים זאת ע"י $(13) \in S_9, (1925) \in \langle\sigma\rangle$:
$(13)(1925)(13)^{-1} = (13)(1925)(13) = (2539) \notin \langle\sigma\rangle$.

ג. $H \leq G$ ו- $|G| = 34$, לכן לפי משפט לגרנז', $|H| \in \{1, 2, 17, 34\}$.
אם $|H| = 1, 34$, אז $H \lhd G$ באופן טריוויאלי.
אם $|H| = 17$, אז $[G : H] = 2$ ולכן $H \lhd G$ לפי טענה שהוכחנו.
כיוון שנתון ש-H אינה ת"ח נורמלית, בהכרח $|H| = 2$.

שאלה 2. (35 נק') תהי $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \vee b \neq 0 \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות.

א. הוכיחו כי $H \leq GL_2(\mathbb{R})$.

ב. הוכיחו כי $H \cong \mathbb{C}^*$.

ג. כמה איברים מסדר 4 יש ב-H? מצאו את כולם.

ד. (בונוס 10 נק') מצאו אוטומורפיזם לא טריוויאלי (כלומר: לא הזהות) של H. מה הוא עושה לאיברים המתאימים ב-$\mathbb{C}^*$?

פתרון.

א. ראשית נוודא שאכן $H \subseteq GL_2(\mathbb{R})$: תהי $A \in H$. מתקיים: $det(A) = a^2 + b^2 > 0$, כיוון ש-a או b אינם 0. לכן A הפיכה, כלומר: $A \in GL_2(\mathbb{R})$.
איבר היחידה של $GL_2(\mathbb{R})$ הוא $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ שאכן מקיימת את התנאים של H, לכן $I_2 \in H$.
אין צורך לבדוק שמתקיימת אסוציאטיביות (למה?), נבדוק שיש סגירות לכפל ולהופכיים.
תהיינה $H \ni \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A$. מתקיים: $\in \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = AB$
H, כיוון שהתנאים של H מתקיימים (יש להראות גם למה לא ייתכן ש: $ac - bd = $ $ad + bc = 0$ אך זו אלגברה פשוטה).
לפי הנוסחה לחישוב מטריצה הופכית (אפשר לחשב ידנית גם) נקבל ש- $A^{-1} =$ $H \ni \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, כיוון שהגורם שבחוץ הוא סקלר שונה מ-0 והתנאים של H עדיין מתקיימים.
בסך הכל הראינו כי $H \leq GL_2(\mathbb{R})$ כדרוש.

ב. נגדיר: $\varphi : H \to \mathbb{C}^*$ לפי $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a + bi$.
φ מוגדר היטב כי התמונות שייכות ל-$\mathbb{C}^*$ ו- $0 \notin im(\varphi)$ כי מטריצת האפס לא שייכת ל-H.
תהיינה $H \ni \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. מתקיים:

$$\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}) = \varphi\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

קיבלנו שיוויון ולכן φ הומומורפיזם. φ כמובן על, כי לכל $a + bi \in \mathbb{C}^*$, יש מקור תחת φ: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in H$.
φ חח"ע כי הגרעין שלו טריוויאלי (או מבדיקה לפי ההגדרה) כלומר:

$$ker(\varphi) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in H \,|\, \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = e_{\mathbb{C}^*}\} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in H \,|\, a + bi = 1\} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \{e_H\}.$$

בסך הכל: $\varphi : H \to \mathbb{C}^*$ איזומורפיזם ולכן $H \cong \mathbb{C}^*$ (קיצור דרך: במקום להראות חח"ע ועל ניתן פשוט להראות שיש ל-φ הופכית).

ג. נמצא אוטומורפיזם של H בעזרת אוטומורפיזם חשוב ומוכר של $\mathbb{C}^*$- הצמוד המרוכב, השולח את $a + bi$ ל- $a - bi$. ניתן לבדוק בקלות שזה אכן אוטומורפיזם.
אוטומורפיזם זה משרה אוטומורפיזם של H (ע"י הרכבת האיזומורפיזם φ^{-1} עליו)

המוגדר כך: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

הדרך מראה, כמובן, שהאוטומורפיזם שמצאנו שולח את האיברים המתאימים ב-$\mathbb{C}^*$ לצמוד המרוכב שלהם.

שאלה 3. (35 נק') תהי G חבורה אבלית, ויהי T אוסף האיברים מסדר סופי ב-G.

א. הוכיחו כי $T \lhd G$ (ניתן להסתמך על כך ש- $T \leq G$, הוכחתם זאת בתרגיל בית).

ב. מהו $[G:T]$ אם G סופית? נמקו היטב.

ג. הוכיחו כי איבר היחידה בחבורת המנה G/T הוא האיבר היחיד בה מסדר סופי.

ד. הוכיחו / הפריכו: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$.

פתרון.

א. G אבלית ולכן כל ת"ח שלה נורמלית, בפרט $T \lhd G$.
כן, זה ממש קל, השאלה היתה צריכה להיות: הוכיחו כי $T \lhd G$ אם $T \leq G$ (מה שקורה במקרה ש-G אבלית אך לא רק), ואז ההוכחה היתה נראית כך:
יהיו $g \in G, t \in T$ ונסמן: $n = o(t)$ (ל-t יש סדר סופי). מתקיים: $(g^{-1}tg)^n = (g^{-1}tg)(g^{-1}tg) \cdot ... \cdot (g^{-1}tg) = (g^{-1}t^n g) = g^{-1}eg = e$, ולכן $g^{-1}tg \in T$, שכן יש לו סדר סופי (לכל היותר n).

ב. אם G סופית, סדר כל איבר בה סופי גם כן, שכן סדר איבר חסום ע"י סדר החבורה (לפי תת-החבורה הנוצרת על ידו או לפי מסקנה ממשפט לגרנז'). לכן $T = G$, ואז ב-G/T יש רק קוסט אחד, שהוא $T = G$, ולכן $[G:T] = 1$.

ג. איבר היחידה בחבורת המנה הוא T וברור שהוא מסדר סופי (סדרו 1).
נניח בשלילה שקיים איבר נוסף בחבורת המנה מסדר סופי, נאמר n, אז הוא מהצורה aT כאשר $a \notin T$.
לכן: $(aT)^n = a^nT = T$ כי T הוא איבר היחידה בחבורת המנה. אז $a^n \in T$ ולכן סדרו סופי, נאמר m. מתקיים: $(a^n)^m = a^{nm} = e$, ולכן גם a מסדר סופי, בסתירה להנחה ש- $a \notin T$.

ד. הפרכה: ב-$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כל האיברים מסדר סופי* ואילו ב-$\mathbb{Q}$ כל האיברים חוץ מ-0 מסדר אינסופי, אך ראינו שאיזומורפיזם שומר על סדרי האיברים ולכן לא ייתכן שיש כזה בין החבורות הללו. למעשה אין אפילו הומומורפיזם לא טריוויאלי $\varphi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$!
הסבר: יהי $\frac{a}{b} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (נניח בה"כ $b > 0$) מתקיים:
$((\frac{a}{b}+\mathbb{Z})^b = (\frac{a}{b}+\mathbb{Z})+(\frac{a}{b}+\mathbb{Z})+...+(\frac{a}{b}+\mathbb{Z}) = (\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+...+\frac{a}{b})+\mathbb{Z} = a+\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
לפי הגדרת הפעולה בחבורת המנה וכיוון ש-$a \in \mathbb{Z}$. לכן $o(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) \leq b$ (אם ניקח שבר מצומצם זה יהיה ממש שיוויון) ובפרט הסדר סופי.
*אם תהיתם לעצמכם מה הקשר בין הסעיף הזה לקודמיו...

בהצלחה!