שיעור 6

הצבות טריגונומטריות $x=a\sin t, x=a\cos t$

כאשר נתון אינטגרל מהצורה $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ ניתן להשתמש בהצבה $x=a\sin t$ או $x=a\cos t$.

תרגיל

הראה ש $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$.

פתרון

נציב $x=a\sin t$ ואז $dx=a\cos tdt$ ו $\sin t=\frac{x}{a}\Leftarrow t=\arcsin\frac{x}{a}$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}dt=\int\frac{a\cos t}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int\frac{a\cos t}{a\cos t}dt=\int 1dt=t=\arcsin\frac{x}{a}$$

תרגיל

חשב את האינטגרל $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

פתרון

נציב $x=2\sin t$ ואז $dx=2\cos tdt$ ו $\sin t=\frac{x}{2}\Leftarrow t=\arcsin\frac{x}{2}$.

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=4\int\sin^2 tdt .$$

נשתמש בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ונקבל $4\int\sin^2 tdt=2\int(1-\cos 2t)dt=2t-\sin 2t$.

נשים לב ש $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$.

נקבל ש $2t-\sin 2t=2\arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

אינטגרלים מהצורה $\sin^n x\cos^m x$

נראה שיטה לחשב אינטגרלים מהצורה $\sin^n x\cos^m x$ כאשר m,n שלמים ולפחות אחד מהם אי זוגי.

אם m אי זוגי נציב $t=\sin x$ ואז $dt=\cos xdx$.

$$\int\sin^n x\cos^m xdx=\int\sin^n x\cos^{m-1}x\cos xdx=\int\sin^n x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{m-1}{2}}\cos xdx=\int t^n(1-t)^{\frac{m-1}{2}}dt$$

כל שנותר לחשב אינטגרל של פולינום.

אם n אי זוגי נציב $t=\cos x$ ואז $dt=-\sin xdx$

$$\int\sin^n x\cos^m xdx=-\int-\sin^{n-1}x\cos^m x\sin xdx=-\int-\left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos^m x\sin xdx=-\int(1-t)^{\frac{n-1}{2}}t^m dt$$

כל שנותר לחשב אינטגרל של פולינום.

תרגיל

חשב את $\int\sin^4 x\cos^3 xdx$.

פתרון

נציב $t=\sin x$ ואז $dt=\cos xdx$

$$\int \sin^4 x\cos^3 x dx = \int \sin^4 x\cos^2 x\cos x dx = \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx =$$
$$= \int t^4\left(1-t^2\right)dt = \int \left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

אם m,n מספרים אי שליליים זוגיים נשתמש בזהויות

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

כדי להוריד את גודל החזקה.

<u>תרגיל</u>

חשב את $\int \cos^4 x\sin^2 x dx$.

<u>פתרון</u>

$$\int \cos^4 x\sin^2 x dx = \int \cos^2 x\sin^2 x\cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x dx\right]$$

נחשב את האינטגרל עבור המחובר הראשון

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}$$

נחשב את האינטגרל עבור המחובר השני

$\int \sin^2 2x\cos 2x dx$ נציב $t = \sin 2x$ ונקבל $dt = 2\cos 2x dx$

$$\int \sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int 2\sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{t^3}{6} = \frac{\sin^3 2x}{6}.$$

נציב חזרה את התוצאות האחרונות ונקבל את האינטגרל

$$\int \cos^4 x\sin^2 x dx = \frac{1}{8}\left[\int \sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x dx\right] = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c$$

<u>הצב טריגונומטרית אוניברסאלית $t = \tan\frac{x}{2}$.</u>

נציב $t = \tan\frac{x}{2}$.

נרשום את $\sin x$ באמצעות t.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\cancel{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\cancel{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

נרשום את $\cos x$ באמצעות t

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1} - 1 = \frac{2}{t^2+1} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

נרשום את $\tan x$ באמצעות t

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

נשים לב ש $t=\tan\frac{x}{2} \Leftarrow \frac{x}{2}=\arctan t \Leftarrow x=2\arctan t \Leftarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

<u>תרגיל</u>

חשב $\int\frac{dx}{\cos x+\sin x+1}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש בהצבה $t=\tan\frac{x}{2}$ ואז $\cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}$, $\sin x=\frac{2t}{t^2+1}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

נציב את הערכים הנ"ל ונקבל

$$\int\frac{dx}{\cos x+\sin x+1}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1+t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t+1}=\ln\left|t+1\right|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| .$$

<u>האינטגרל המסוים</u>

<u>הגדרה</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$. יהי n מספר טבעי, ותהי T חלוקה של $[a,b]$ ל n תתי-קטעים

$$T:\quad a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$$

נסמן את קטעי החלוקה ע"י

$$\Delta x_1=[x_0,x_1],\Delta x_2=[x_1,x_2],....,\Delta x_n=[x_{n-1},x_n]$$

ונסמן $\Delta T=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\Delta x_{31},...,\Delta x_n\}$ ונקרא ל ΔT הפרמטר של החלוקה T. מכל קטע Δx_i נבחר נקודה שרירותית c_i, אזי הביטוי $\sigma_T(c_1,c_2,...,c_n)=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$ נקרא הסכום האינטגרלי של רימן המתאים לחלוקה T ולבחירת הנקודות c_i.

הפונקציה $f(x)$ נקראת אינטגרבילית לפי רימן בקטע $[a,b]$ אם קיים הגבול $I=\lim_{\Delta T\to 0}\sigma_T(c_1,c_2,...,c_n)=\lim_{\Delta T\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$ והוא בלתי תלוי בבחירת החלוקה T ובבחירת נקודות החלוקה c_i, כל עוד פרמטר החלוקה ΔT שואף לאפס.

את הגבול הזה נסמן ע"י $I=\int_a^b f(x)dx$ ונקרא לו האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

<u>תכונות האינטגרל המסוים</u>

א. לכל פונקציה $f(x)$ המוגדרת בנקודה $x=a$ נקבע כי $\int_a^a f(x)dx=0$.

ב. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז נקבע כי $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$.

ג. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז לכל מספר קבוע c, הפונקציה $cf(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$.

ד. אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטעים $[a,b]$ ו $[b,c]$ אז היא אינטגרבילית גם בקטע $[a,c]$ ומתקיים
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx .$$
ה. אם $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציות $f(x)\pm g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

ו. אם $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציה $f(x)g(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

<u>נוסחת ניוטון-לייבניץ</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$. אזי
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

<u>דוגמא</u>

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה e^x ולבין הישרים $x=0, x=\ln 4$.

נחשב את האינטגרל המסוים $\int_0^{\ln 4} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4-1=3$.

<u>החלפת משתנים</u>

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ותהי $x=g(t)$ פונקציה גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$ ואשר התמונה שלה שווה לקטע $[a,b]$ כאשר $g(\alpha)=a$ ו $g(\beta)=b$. אזי
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt$$

<u>תרגיל</u>

חשב $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

<u>פתרון</u>

נציב $x=\pi-t$ ז"א $g(t)=\pi-t$. $g(\pi)=0, g(0)=\pi$.

$x=\pi-t \Leftarrow dx=-dt$.
$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\sin^2(\pi-t)}dt = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t - t\sin t}{1+\sin^2 t}dt = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\sin^2 t}dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$
סה"כ קיבלנו
$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\sin^2 t}dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\sin^2 t}dt \Rightarrow 2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{\pi\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$
נשאר לחשב את האינטגרל $\int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{1+\sin^2 x}dx$.

נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים $\int \frac{\pi\sin x}{1+\sin^2 x}dx$. נציב $t=\cos x$ ואז $dt=-\sin x dx$

$$\int \frac{\pi \sin x}{1+\sin^2 x}dx = -\pi \int \frac{1}{1+t^2}dt = -\pi \arctan t = -\pi \arctan(\cos x)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\sin^2 x}dx = [-\pi \arctan(\cos x)]_0^{\pi} = -\pi \arctan(\cos \pi) + \pi \arctan(\cos 0) = -\pi \cdot \frac{-\pi}{4} + \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}$$

נקבל ש

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\sin^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$$

<u>אינטגרציה נומרית</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

נניח ולא ניתן לחשב את $I = \int_a^b f(x)dx$.

מטרה: למצוא קירוב ל $I = \int_a^b f(x)dx$.

נבחר מספר טבעי n (ככל שנבחר מספר גדול יותר נקבל תוצאה מדויקת יותר) ונחלק את הקטע ל n חלקים שווים שאורכם $\Delta = \frac{b-a}{n}$ וכך נקבל את החלוקה

$$T: \quad x_0 = a, x_1 = a+\Delta, x_2 = a+2\Delta, ... x_n = a+n\Delta = b$$

<u>שיטת המלבנים</u>

ניתן לחשב את שטחי המלבנים המתקבלים ולקבל שטח הקרוב לשטח האמיתי.

אם נבחר את נקודת הקצה השמאלית נקבל $I \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

אם נבחר את נקודת הקצה הימנית נקבל $I \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

<u>גודל השגיאה</u>

הנוסחה שנותנת את גודל השגיאה המקסימאלית בשיטה זו היא $E_n \le \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \max_{a\le x\le b} |f'(x)|$.

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרל $\int_1^2 x^2 dx$ ע"י שיטת המלבנים כאשר $n = 5$.

<u>פתרון</u>

בכיתה

<u>שיטת הטרפז</u>

עבור חלוקה T לכל קטע Δx_i בחלוקה ניצור טרפז המחבר את הנקודות $(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i)), (x_{i-1}, 0), (x_i, 0)$ ובצורה כזאת נקבל טרפז שאורך בסיסיו הם $f(x_{i-1})$ ו $f(x_i)$ נחבר את שטחי כל הטרפזים ונקבל קירוב לשטח האמיתי.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]=$$
$$\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_n)\right]$$

<u>גודל השגיאה</u>

$E_n \le \frac{(b-a)}{12}\cdot\frac{(b-a)^2}{n}\cdot\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

<u>תרגיל</u>

חשב את האינטגרל $\int_1^2 x^3dx$ ע"י שיטת הטרפז כאשר $n=5$.

<u>פתרון</u>

בכיתה