תרגיל 5* - פתרון

שאלה 1

(1) **הוכחה:**

f רציפה ב-$[a,b]$ ולכן גם בכל קטע שמוכל ב-$[a,b]$.

יהי $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה כלשהי של $[a,b]$.

f רציפה ולכן אינטגרבילית בכל אחד מקטעי החלוקה.

ולכן, עפ"י משפט הערך הממוצע האינטגרלי

מקטע החלוקה ה-i ($i\in\{1,\dots,n\}$) קיים $c_i \in (x_{i-1},x_i)$

כך ש-

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

אולם, מאדיטיביות האינטגרל:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

כלומר -

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

מכיון שהבחירה ב-P היתה שרירותית, הנ"ל מתקיים לכל חלוקה - כנדרש.

(2) **דוגמא נגדית:**

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$ בקטע $[0,1]$.

f אינטגרבילית בקטע (רציפה פרט לנק' אחת)! - $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ (ידוע!)

אולם, לכל חלוקה $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ של $[0,1]$,

מתקיים:

$$\bar{S}(P) = 1\cdot\Delta x_n = \Delta x_n = 0$$

(3) דוגמא נגדית:

$$f(x)=\begin{cases}1/x & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$$ ב-$[0,1]$.

f מוגדרת ב $[0,1]$ ורציפה ב-$(0,1]$ אך אינה חסומה ב-$[0,1]$, ולכן אינה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

שאלה 2

(1) (א) לכל x בקטע $[0,1]$ $\quad |\cos x|\le 1$

וכן x בקטע $(1,3]$ $\quad |x-2|\le 1$

ולכן, לכל x ב-$[0,3]$ מתקיים $|f(x)|\le 1$, כלומר: f חסומה בקטע.

בנוסף, f רציפה בקטע - פרט, אולי, לשתי נקודות $x=0,1$

ולכן f אינטגרבילית ב-$[0,3]$.

(ב)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}|x-2|=1$$
$$\neq$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos x=\cos 1$$

$\cos 1\neq 1$, ולכן ל-f יש אי רציפות ממין ראשון בנק' $x=1$.

נניח בשלילה כי ל-f יש פונקציה קדומה בקטע, נסמנה: F.

לכן, לכל x ב-$[0,3]$: $F'(x)=f(x)$ וקיבלנו כי ל-F' יש נק' אי רציפות ממין ראשון בקטע - והמשפט שקף כי אי רציפות של נגזרת של פונקציה גזירה בקטע סגור הן ממין <u>שני</u> בלבד.

לכן - ל-f אין פונקציה קדומה ב-$[0,3]$.

(ג) לכל $0 \le x \le 1$:

$$F(x) = \int_0^x \cos t \, dt = \sin t \Big|_0^x = \sin x$$

שכן, $f(x)=\cos x$ רציפה ב-$[0,1]$, שלכן קבוע בה $x=0$.

עבור $1<x\le 2$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt =$$

לפי המשפט היסודי של החדו"א.

$$= F(1)-F(0) + \int_1^x (2-t)\,dt = \sin 1 + \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x =$$

$$= \sin 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = \sin 1 - \frac{3}{2} + 2x - \frac{x^2}{2}.$$

עבור $2<x\le 3$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)\,dt =$$

$$= F(2) + \int_2^x (t-2)dt = \sin 1 - \frac{3}{2} + 4 - 2 + \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)\Big|_2^x =$$

$$= \sin 1 + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 2x - 2 + 4 = \sin 1 + 2.5 + \frac{x^2}{2} - 2x.$$

וקיבלנו כי:

$$F(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \le x \le 1 \\ \sin 1 - 1.5 + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \\ \sin 1 + 2.5 + \frac{x^2}{2} - 2x & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ x-1 & 1 < x \le 4 \end{cases}$$

באותו אופן כמו בסעיף (1)(ג) - f אינטגרבילית ב-$[0,4]$, ויש לה פונקציה קדומה רציפה:

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 1 + \frac{x^2}{2} - x & 1 < x \le 4 \end{cases}$$

כעת, לפי המשפט היסודי:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = F(4) - F(0) = 1 + \frac{16}{2} - 4 - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right) = 5.$$