מועד א' ־ בדידה מדעי המחשב (89198)

27.9.2017, ז' תשרי תשע"ח

מרצה: אחיה בר־און
מתרגל: אריאל ויצמן

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.
- ניקוד מקסמאלי הוא 120. הניקוד מצוין ליד כל שאלה. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- בשאלות על עוצמות התשובות צריכות להיות מספר סופי או מתוך האפשרויות $\{\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph_0}, 2^{\aleph}\}$.

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. [8 נק' לסעיף] הוכיחו או הפריכו־ לכל p,q פסוקים לוגים מתקיים (הסימון $\equiv$ בשאלה זאת מציין שקילות לוגית):

(א) $[(p\to q)\to(q\to p)]\equiv[p\vee(\neg q)]$

(ב) $[p\leftrightarrow q]\equiv[(\neg q)\leftrightarrow(\neg p)]$

פתרון:

מש.ב.

2. נגדיר יחס R על $\mathbb{N}$ כך: לכל $a,b\in\mathbb{N}$

$$aRb \iff [(a|b)\wedge(\exists m\in\mathbb{N}:\ b|a^m)]$$

כאשר $a|b$ פירושו a מחלק את b.

(א) [6 נק'] הוכיחו כי R יחס סדר.

פתרון:

רפלקסיביות: יהא x טבעי אזי $x|x$ וגם קיים $m=1$ כך ש $x|x^1$ ולכן xRx.

אנטי סימטריות : יהיו x,y טבעיים כך ש xRy וגם yRx. בפרט $x|y$ וגם $y|x$ ולכן $x=y$.

טרנזיטיביות: יהיו x,y,z טבעיים כך ש xRy וגם yRz אז $(x|y)\wedge(\exists m\in\mathbb{N}:\ y|x^m)$ וגם $(y|z)\wedge(\exists t\in\mathbb{N}:\ z|y^t)$ ולכן $x|z$ (מטרנזיטיביות של "מחלק את"). בנוסף $z|y^t$ וגם $y^t|\left(x^m\right)^t$ ולכן $z|x^{mt}$. מכאן ש xRz.

(ב) [5 נק' לסעיף] עבור הקבוצות הבאות מצאו $\inf,\sup$ במידה וקיימים. במידה שלא קיימים $\inf,\sup$ הוכיחו זאת.

i. $B=\{2^n:\ n\in\mathbb{N}\}$

פתרון:

טענה: $\inf(B)=2$. הוכחה: לכל n טבעי $(2|2^n)\wedge(\exists m=n:2^n|2^m)$ ולכן $2R2^n$. כלומר 2 קטן שווה מכל איברי B. בנוסף הוא הכי גדול עם תכונה זאת כי אם x קטן שווה מכל איברי B בפרט $xR2$.

טענה: $\sup$ לא קיים. הוכחה: נניח בשלילה כי $\sup B=x$ אזי בפרט לכל n טבעי מתקיים כי $2^n|x$ אבל עבור $x<n$ זה לא יתקיים. סתירה.

ii. $B=\{2n:\ n\in\mathbb{N}\}$

פתרון:

טענה: $\inf$ לא קיים. הוכחה: נניח בשלילה כי $\inf B=x$ אזי בפרט $xR2$ וגם $xR6$. מכך ש $xR2$ נקבל כי $x|2$ ולכן $x\in\{1,2\}$. מכך ש $xR6$ נקבל כי קיים mטבעי כך ש $6|x^m$ ובפרט $3|x^m$ ולכן $3|x$, זה לא מתקיים עבור $x\in\{1,2\}$. סתירה.

טענה: $\sup$ לא קיים. הוכחה: נניח בשלילה כי $\sup B=x$ אזי בפרט לכל n טבעי מתקיים כי $2n|x$ אבל עבור $x<n$ זה לא יתקיים. סתירה.

iii. $B=\left\{2\cdot3^3\cdot4^3,2^2\cdot3\cdot4^2,2^3\cdot3^2\cdot4\right\}$

פתרון: $B=\left\{2\cdot3^3\cdot4^3,2^2\cdot3\cdot4^2,2^3\cdot3^2\cdot4\right\}=\left\{2^7\cdot3^3,2^6\cdot3,2^5\cdot3^2\right\}$

טענה: $\inf(B)=2^5\cdot3$ הוכחה: מתקיים כי $2^5\cdot3$ מחלק כל אחד מאיברי $\left\{2^7\cdot3^3,2^6\cdot3,2^5\cdot3^2\right\}$. ובנוסף קיים $m=3$ כך ש $\left(2^5\cdot3\right)^m$ מתחלק ע"י כל איבר ב $\left\{2^7\cdot3^3,2^6\cdot3,2^5\cdot3^2\right\}$ ולכן $2^5\cdot3$ חסם מלרע של B. נראה שהוא הכי גדול אם תכונה זאת: אם x חסם מלרע של B אזי בפרט קיים m טבעי כך ש $2^6\cdot3|x^m$ וגם $x|2^6\cdot3$ ולכן $2^6\cdot3|x^m|2^{6m}\cdot3^m$ ובפרט x מהצורה $x=2^s3^t$ עבור s,t טבעיים כל שהם. כיוון ש $x|2^6\cdot3$ אזי $t=1$ וכיוון ש $x|2^5\cdot3^2$ אזי $s\le5$ ולכן $x|2^5\cdot3$ בנוסף קיים $m'=5$ כך ש $2^{5s}3^{5t}=2^5\cdot3|x^{m'}$ ולכן $xR2^5\cdot3$. באופן דומה $\sup B=2^7\cdot3^3$

3.

(א) [4 נק'] צטטו את משפט לחיצת הידיים.

פתרון:

יהא $G=(V,E)$ גרף פשוט, סופי, לא מכוון אזי $2\left|E\right|=\sum_{v\in V}\deg(v)$.

(ב) [6 נק'] יהא $T=(V,E)$ עץ מסדר סופי עם $2\leq |V|$ קודקודים. הוכיחו כי קיים קודקוד מדרגה 1.

פתרון:

כיוון שעץ הוא גרף קשיר אין קודקוד מדרגה 0. נניח בשלילה כי כל קודקוד $v\in V$ מקיים $2\leq \deg(v)$ (בפרט $3\leq |V|$) אזי לפי משפט לחיצת הידיים

$$2\left|E\right|=\sum_{v\in V}\deg(v)\geq\sum_{v\in V}2=2\left|V\right|$$

כלומר $|V|\leq|E|$ואז לפי משפט קיים מעגל ב T בסתירה לכך ש T עץ.

(ג) [8 נק'] יהא $T=(V,E)$ עץ מסדר סופי עם $2\leq |V|$ קודקודים. הוכיחו כי קיימים שני קודקודים שונים בעלי דרגה 1 (הדרכה אפשרית: באינדוקציה).

פתרון:

עבור $|V|=2$ נקבל עץ $T=(V,E)$ כאשר $V=\{v_1,v_2\}$ ו $E=\{\{v_1,v_2\}\}$ כלומר v_1 ——— v_2 וקודקודים אלו בעלי דרגה 1.

כעת נניח נכונות עבור עצים עם n קודקודים ונוכיח עבור עצים עם $n+1$ קודקודים. יהא $T=(V,E)$ עץ עם $|V|=n+1$. לפי סעיף קודם קיים $v\in V$ מדרגה 1. נסמן את הקשת $e\in E$ שמכילה את v. נגדיר $T'=(V',E')$ כאשר $V'=V\setminus\{v\}, E'=E\setminus\{e\}$. טענה: T' עץ. הוכחה: בין כל שני קודקודים של V' יש מסלול בקשתות של E (כי Tעץ) ובמסלול כזה e לא משתתפת כי אחרת היינו מגיעים ל v ויוצאים ממנו מה שאומר שדרגתו גדולה שווה ל 2. ב T' אין מעגלים כי מעגל ב T' הוא גם מעגל ב T. כיוון ש T' בעל n קודקודים נשתמש בהנחת האינדוקציה שיש בו $u_1,u_2\in V'$ בעל דרגה 1. כיוון ש v לא מחובר לשניהם אז ב.ה.כ הוא לא מחובר ל u_1 ואז $v,u_1\in V$ בעל דרגה 1.

(ד) [4 נק'] תנו דוגמא לעץ $T=(V,E)$ מסדר סופי עם $3\leq |V|$ קודקודים כך ש<u>לא</u> קיימים שלוש קודקודים שונים בעלי דרגה 1.

פתרון:

למשל v_3 ——— v_2 ——— v_1 .

4. בשביל לקבל תואר במדעי הגינון במכללת "עובר ושב" סטודנט צריך לקבל ציונים ב 12 קורסים. רשימת הקורסים שהסטודנט יכול לקחת מתחלקים ל 3 האשכולות הבאים:

(א) אשכול A: קורסים בתחום "גינון מודרני". אשכול זה מונה 15 קורסים.

(ב) אשכול B: קורסי בחירה ב"גינון מתקדם". אשכול זה מונה 3 קורסים.

(ג) אשכול C: קורסים בתחום "היסטורית הגינון". אשכול זה מונה 3 קורסים.

ענו על השאלות הבאות [7 נק' לסעיף]:

(א) כמה אפשריות למערכת שעות יש לסטודנט על מנת לקבל תואר.

פתרון:

זה שקול לבחור 12 קורסים מתוך ה $21=3+3+15$ האפשריים ולכן התשובה היא $\binom{21}{12}$.

(ב) כמה אפשריות למערכת שעות יש לסטודנט על מנת לקבל תואר במידה והסטודנט צריך לקחת 8 קורסים (בדיוק) באשכול A, 2 קורסים (בדיוק) באשכול B ו 2 קורסים (בדיוק) באשכול C.

פתרון:

צריך לבחור 8 קורסים מתוך 15 כפול 2 מתוך 3 כפול 2 מתוך 3. הבחירה היא ללא חשיבות לסדר וללא חזרות ולכן התשובה היא

$$\binom{15}{8}\binom{3}{2}\binom{3}{2}=6435\cdot 3\cdot 3$$

(ג) בסוף שנה המכללה מחלקת לכל סטודנט שסיים את חובות התואר, טבלא מרכזת שבה כתובים כמה קורסים הסטודנט לקח מכל אשכול. למשל, הטבלאות

$$\begin{array}{c|c} A & 11 \\ B & 1 \\ C & 0 \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c|c} A & 6 \\ B & 3 \\ C & 3 \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c|c} A & 8 \\ B & 1 \\ C & 3 \end{array}$$

הן מספר דוגמאות. כמה טבלאות שונות כאלו יש?

פתרון:

נסמן x_1 מספר הקורסים שסטונט לוקח מאשכול A, x_2 מאשכול B ו x_3 מאשכול C. השאלה שקולה לכמה פתרונות מהשלמים יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

עם התנאים $0 \le x_1 \le 15, 0 \le x_2 \le 3, 0 \le x_3 \le 3$. בלי חסמים מלמעלה על x_i מספר הפתרונות הוא $\binom{12+3-1}{3-1} = 91$. נגדיר A_i קבוצת הפתרונות בהם x_i לא מקיים את החסם מלמעלה שלו. נשים לב כי $A_1 = \emptyset$ כי x_1 לא יכול להיות גדול מ 15 (כי $x_1 + x_2 + x_3 = 12$) נרצה לחשב

$$\left|\bigcap_{i=1}^{3} A_i^c\right| = \left|\bigcap_{i=2}^{3} A_i^c\right| = \left|\left(\bigcup_{i=2}^{3} A_i\right)^c\right| = 91 - \left|\bigcup_{i=2}^{3} A_i\right|$$

כיוון ש

$$\left|\bigcup_{i=2}^{3} A_i\right| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| = \binom{8+3-1}{3-1} + \binom{8+3-1}{3-1} - \binom{4+3-1}{3-1} = 45 + 45 - 15 = 75$$

כיוון שמספר הפתרונות ל $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ עם תנאים $0 \le x_1, 4 \le x_2, 0 \le x_3$ הוא מספר הפתרונות (ע"י החלפת משתנים) למשוואה $y_1 + y_2 + y_3 = 8$ כאשר $0 \le y_i$ שהוא $\binom{8+3-1}{3-1} = 45$. ובאופן דומה החישובים הנוספים. לכן התשובה הסופית היא $91 - 75 = 16$.

5. [8 נק' לכל סעיף] תהא $X = \{1, \ldots, n\}$. נגדיר יחס $\sim$ על $P(X) \times P(X)$ כך: לכל $(A_1, A_2), (B_1, B_2) \in P(X) \times P(X)$

$$(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2) \iff A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$$

(א) הוכיחו כי $\sim$ יחס שקילות.

פתרון:

- רפלקסיביות: לכל $(A_1, A_2) \in P(X) \times P(X)$ מתקיים כי $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_2$ ולכן $(A_1, A_2) \sim (A_1, A_2)$.
- סימטריות: נניח $(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2)$ אזי $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$ ולכן $B_1 \cap B_2 = A_1 \cap A_2$ ומכאן ש $(B_1, B_2) \sim (A_1, A_2)$.
- טרנזיטיביות: נניח $(A_1, A_2) \sim (B_1, B_2)$ וגם $(B_1, B_2) \sim (C_1, C_2)$ ולכן $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2$ וגם $B_1 \cap B_2 = C_1 \cap C_2$ ומהחיבור של שניהם נקבל כי $A_1 \cap A_2 = C_1 \cap C_2$ ולכן $(A_1, A_2) \sim (C_1, C_2)$.

(ב) מצאו את גודל קבוצת המנה $^{P(X)\times P(X)}/_{\sim}$.

פתרון:

טענה: $^{P(X)\times P(X)}/_{\sim} = \{[(A, A)]_{\sim} \mid A \subseteq X\}$

הוכחה: $(\supseteq)$ ברור. $(\subseteq)$ יהא $[(A_1,A_2)]_\sim$ מחלקת שקילות אזי נגדיר $A=A_1\cap A_2$ ויתקיים $A\cap A=A_1\cap A_2$ ולכן $(A_1,A_2)\sim(A,A)$ ולכן $[(A_1,A_2)]_\sim=[(A,A)]_\sim$.
בנוסף, לכל $X\subseteq A'\neq A$ מתקיים כי $[(A,A)]_\sim\neq[(A',A')]_\sim$ כי $A\cap A=A\neq A'=A'\cap A'$.
לכן

$$\left|{}^{P(X)\times P(X)}/\sim\right|=|\{[(A,A)]_\sim\mid A\subseteq X\}|=|P(X)|=2^{|X|}=2^n$$

(ג) יהא $(A_1,A_2)\in P(X)\times P(X)$. נסמן $|A_1\cap A_2|=m$ מצאו את גודל מחלקת השקילות $[(A_1,A_2)]_\sim$.
פתרון:
לפי הגדרה

$$[(A_1,A_2)]_\sim=\{(B_1,B_2)\in P(X)\times P(X)\mid A_1\cap A_2=B_1\cap B_2\}$$

עבור $(B_1,B_2)\in[(A_1,A_2)]_\sim$ מתקיים כי $A_1\cap A_2=B_1\cap B_2\subseteq B_1,B_2$. כלומר B_1,B_2 מכילות את $A_1\cap A_2$ והחיתוך $B_1\cap B_2=A_1\cap A_2$. לכן יצירת כל הקבוצות $(B_1,B_2)\in[(A_1,A_2)]_\sim$ יכולות להתבצע כך:

- נתחיל עם שני עותקים של $A_1\cap A_2$ שנסמנם B_1,B_2.
- כל איבר $x\in X\setminus(A_1\cap A_2)$ נוסיף אותו ל B_1 או ל B_2 או לאף אחד.

עבור כל בחירה לעיל נקבל זוג (B_1,B_2) שמתייחס ל $(A_1,\cap A_2)$ ואילו כל הזוגות. לכן מספר האיברים ב $[(A_1,A_2)]_\sim$ הוא $3^{|X\setminus(A_1\cap A_2)|}=3^{n-m}$.

קל לראות שכל B_1,B_2 שיוצרו בתהליך לעיל יקימו כי $(B_1,B_2)\in[(A_1,A_2)]_\sim$. מצד שני בהינתן $(B_1,B_2)\in[(A_1,A_2)]_\sim$ נוכל ליצור אותם ע"י התהליך לעיל ע"י קביעת שכל $x\in B_1\setminus(A_1\cap A_2)$ יתווספו לעותק הראשון של $A_1\cap A_2$ וכל $x\in B_2\setminus(A_1\cap A_2)$ יתווספו לעותק השני של $A_1\cap A_2$.

6. [8 נק' לכל סעיף] עבור $A=\{1,2,3,4\}$, מצאו את עוצמת הקבוצות הבאות:

(א) S_1 - קבוצת הפונקציות $f:A\to\mathbb{N}$ החח"ע.
פתרון:
כיוון ש $S_1\subseteq\mathbb{N}^A$ נקבל כי $|S_1|\leq\aleph_0^4=\aleph_0$. מצד שני נוכל להגדיר $F:\mathbb{N}\to S_1$ פונקציה ע"י מיפוי של n טבעי לפונקציה $\begin{matrix}1\mapsto n\\2\mapsto n+1\\3\mapsto n+2\\4\mapsto n+4\end{matrix}$. כיוון שזוהי פונקציה חח"ע אזי היא שייכת ל S_1 (לפי סעיף 1). בנוסף F חח"ע כי אם $F(n_1)=F(n_2)$ בפרט $n_1=F(n_1)(1)=F(n_2)(1)=n_2$. ולכן $|S_1|\geq\aleph_0$ ולפי ק.ש.ב יש שיוויון.

(ב) S_2 - קבוצת הפונקציות $f:A\to\mathbb{N}$ שאינן חח"ע.
פתרון:
כיוון ש $S_2\subseteq\mathbb{N}^A$ נקבל כי $|S_2|\leq\aleph_0^4=\aleph_0$. מצד שני נוכל להגדיר $F:\mathbb{N}\to S_2$ פונקציה ע"י מיפוי של n טבעי לפונקציה הקבועה $\begin{matrix}1\mapsto n\\2\mapsto n\\3\mapsto n\\4\mapsto n\end{matrix}$. כיוון שזוהי פונקציה לא חח"ע אזי היא שייכת ל S_2 (לפי סעיף 1). בנוסף F חח"ע כי אם $F(n_1)=F(n_2)$ בפרט $n_1=F(n_1)(1)=F(n_2)(1)=n_2$. ולכן $|S_2|\geq\aleph_0$ ולפי ק.ש.ב יש שיוויון.

בהצלחה! ☺