תרגיל בית 3 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך י"א כסלו ה'תשע"ז, 11.12.2016.

שאלות חימום

שאלה 1. הוכיחו שהקבוצה S_n עם פעולת ההרכבה בין פונקציות היא אכן חבורה.

שאלה 2. תהי $\sigma \in S_n$ המקיימת: $\sigma = \tau_1\tau_2$, כאשר τ_1, τ_2 הם מחזורים זרים. הוכיחו כי $o(\sigma) = [o(\tau_1), o(\tau_2)]$.

שאלות להגשה

שאלה 3. תהי G חבורה אבלית. נסמן ב-T את אוסף האיברים מסדר סופי ב-G. הוכיחו כי $T \leq G$.

שאלה 4. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים, וחשבו את σ^2:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ב-S_9.

ב. $(1\ 2)\,(2\ 5\ 4)\,(3\ 1\ 4)\,(1\ 5)$ ב-S_5.

שאלה 5. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת-חבורה $H \leq G$. כתבו את כל המחלקות השמאליות של H ב-G:

א. $G = (U_{14}, \cdot)$, $H = \langle 9 \rangle$.

ב. $G = (\mathbb{Z}_{15}, +)$, $H = 5\mathbb{Z}_{15}$.

ג. G חבורה כלשהי, $H = \{e\}$.

שאלה 6. נסתכל על $G = (GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$, חבורת המטריצות ההפיכות מגודל 2×2 מעל $\mathbb{Z}_2$.

א. רשום את כל איברי הקבוצה G (הזכר בהבדל בין $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ ל-$M_2(\mathbb{Z}_2)$ בעת הכנת רשימת האיברים).

ב. תהי תת חבורה של G: $A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. מהו האינדקס של A ב-G?

ג. תהי תת חבורה של G: $B = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. מהו האינדקס של B ב-G?

שאלה 7. תהא G חבורה לא אבלית מסדר 8. הוכח שקיימת ב-G תת חבורה מסדר 4.
(הדרכה: הראה שקיים בהכרח איבר מסדר 4 היוצר את תת החבורה המבוקשת).

שאלות רשות

הגדרה. תהיינה $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות. נזכור ממתמטיקה בדידה את המכפלה הקרטזית

$$G \times H = \{(g,h) \,|g \in G, h \in H\}$$

נגדיר פעולה על $G \times H$ רכיב-רכיב,

$$(g_1,h_1) \odot (g_2,h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

שיחד איתה הופכת את $G \times H$ לחבורה. מי הוא איבר היחידה?

שאלה 8. תהיינה G,H חבורות. הוכיחו: $G \times H$ היא אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

שאלה 9. תהיינה G,H חבורות, ויהיו $g \in G$, $h \in H$ איברים מסדר סופי. נסתכל על האיבר $(g,h) \in G \times H$. הוכיחו: $o\left((g,h)\right) = \left[o\left(g\right), o\left(h\right)\right]$ (כלומר: הסדר של (g,h) הוא הכפולה המשותפת המינימלית של $o\left(g\right)$ ושל $o\left(h\right)$).

שאלה 10. נסתכל על $G = U_{14} \times \mathbb{Z}_4$.

א. מהו הסדר של $(3,2)$ ב-G? נמקו.

ב. האם G אבלית? נמקו.

ג. האם G ציקלית? נמקו.

שאלה 11. תהיינה G,H חבורות. האם כל תת-חבורה K של $G \times H$ היא בהכרח מהצורה $K_1 \times K_2$, כאשר K_1 תת-חבורה של G ו-K_2 תת-חבורה של H? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

שאלה 12. כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$. התוכנה תדפיס כפלט את התמורה כמכפלת מחזורים זרים. הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותדפיס את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים.