מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 3 - מרחבים וקטורים

שאלה 1. הוכיחו ש-$V=\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}$ מעל $\mathbb{R}$ הוא מרחב וקטור ביחס לפעולות

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\\ \\ \alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}\end{cases}$$

פתרון.

- חיבור
  - סגירות- יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in V$ אז

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\in V$$

  - אסוציאטיביות - יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\in V$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(x_1+x_2)+x_3\\(y_1+y_2)+y_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x_1+(x_2+x_3)\\y_1+(y_2+y_3)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}x_2+x_3\\y_2+y_3\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- קומוטטיביות- יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in V$ אז

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2+x_1\\y_2+y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

- איבר נייטרלי- יהיו $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in V$ אז

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+0\\y+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

- קיום נגדי- לכל $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V$ ניקח את $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}\in V$ כהאיבר הנגדי.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+(-x)\\y+(-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

• כפל בסקלר

- סגירות- יהיו $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V$ $\alpha\in\mathbb{R},$ אז

$$\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}\in V$$

- אסוציאטיביות- יהיו $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R},$ אז

$$(\alpha\beta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha\beta)x\\(\alpha\beta)y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(\beta x)\\\alpha(\beta y)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\beta x\\\beta y\end{pmatrix}=\alpha\left(\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

- פילוג בסקלר- יהיו $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in V$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R},$ אז

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)x\\(\alpha+\beta)y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x\\\alpha y+\beta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta x\\\beta y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

- פילוג בווקטורים- יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in V$ $\alpha\in\mathbb{R},$ אז

$$\begin{aligned}\alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)&=\\ \alpha\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}\alpha(x_1+x_2)\\\alpha(y_1+y_2)\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}\alpha x_1+\alpha x_2\\\alpha y_1+\alpha y_2\end{pmatrix}&=\\ \begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha x_2\\\alpha y_2\end{pmatrix}&=\\ \alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}&\end{aligned}$$

- סקלר היחידה- יהיו $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$ $1 \in \mathbb{R},$ אז

$$1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x \\ 1y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

שאלה 2. הוכיחו ש- $V = \mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ מעל $\mathbb{R}$ הוא מרחב ווקטור ביחס לפעולות

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\ \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

פתרון.

- חיבור
  - סגירות- יהיו $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in V$$

  - אסוציאטיביות - יהיו $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \in V$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_{11} + c_{11}) & (b_{12} + c_{12}) \\ (b_{21} + c_{21}) & (b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) &
\end{aligned}$$

- קומוטטיביות- יהיו $V \ni \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ אז

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- איבר נייטרלי- יהיו $V \ni \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ אז

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- קיום נגדי- לכל $V \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ניקח את $V \ni \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ כהאיבר הנגדי.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• כפל בסקלר

- סגירות- יהיו $V \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות- יהיו $V \ni \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אז

$$\begin{aligned}
&= (\alpha\beta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\alpha\beta)\, a_{11} & (\alpha\beta)\, a_{21} \\ (\alpha\beta)\, a_{12} & (\alpha\beta)\, a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\,(\beta a_{11}) & \alpha\,(\beta a_{21}) \\ \alpha\,(\beta a_{12}) & \alpha\,(\beta a_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{21} \\ \beta a_{12} & \beta a_{22} \end{pmatrix} \\
&\alpha \left(\beta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

- פילוג בסקלר- יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in V$ אז

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)a_{11} & (\alpha+\beta)a_{21}\\ (\alpha+\beta)a_{12} & (\alpha+\beta)a_{22}\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}\alpha a_{11}+\beta a_{11} & \alpha a_{21}+\beta a_{21}\\ \alpha a_{12}+\beta a_{12} & \alpha a_{22}+\beta a_{22}\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{21}\\ \alpha a_{12} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta a_{11} & \beta a_{21}\\ \beta a_{12} & \beta a_{22}\end{pmatrix} &= \\
\alpha\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- פילוג בווקטורים- יהיו $\alpha\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in V$ אז

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right) &= \\
\alpha\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}\alpha(a_{11}+b_{11}) & \alpha(a_{12}+b_{12})\\ \alpha(a_{21}+b_{21}) & \alpha(a_{22}+b_{22})\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}\alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \alpha a_{12}+\alpha b_{12}\\ \alpha a_{21}+\alpha b_{21} & \alpha a_{22}+\alpha b_{22}\end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha b_{11} & \alpha b_{12}\\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22}\end{pmatrix} &= \\
\alpha\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- סקלר היחידה- יהיו $1\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in V$ אז

$$1\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1a_{11} & 1a_{12}\\ 1a_{21} & 1a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

שאלה 3. הוכיחו ש- $V=\left\{\begin{pmatrix}z\\ \overline{z}\end{pmatrix}\ :\ z\in\mathbb{C}\right\}$ הוא מרחב וקטור מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ y_1+y_2\end{pmatrix}\\[2ex] \alpha\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix}\end{cases}$$

פתרון.

- חיבור
  - סגירות- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ \overline{z}+\overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ \overline{z+w} \end{pmatrix} \in V$$

  - אסוציאטיביות - יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ \overline{t} \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} t \\ \overline{t} \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} z+w \\ \overline{z}+\overline{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \overline{t} \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} (z+w)+t \\ (\overline{z}+\overline{w})+\overline{t} \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} z+(w+t) \\ \overline{z}+(\overline{w}+\overline{t}) \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w+t \\ \overline{w}+\overline{t} \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \overline{t} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

  - קומוטטיביות- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+w \\ \overline{z}+\overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w+z \\ \overline{w}+\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

  - איבר נייטרלי- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{0} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+0 \\ \overline{z}+\overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

  - קיום נגדי- לכל $\begin{pmatrix} 0 \\ \overline{0} \end{pmatrix} \in V$ ניקח את $\begin{pmatrix} -z \\ -\overline{z} \end{pmatrix} \in V$ כהאיבר הנגדי.

$$\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ -\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-z \\ \overline{z}-\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{0} \end{pmatrix}$$

- כפל בסקלר
  - סגירות- יהיו $\alpha \in \mathbb{F}, \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\alpha \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \overline{\alpha z} \end{pmatrix} \in V$$

- אסוציאטיביות- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} \in V$ $\alpha,\beta \in \mathbb{F},$ אז

$$(\alpha\beta)\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)\, z \\ (\alpha\beta)\, \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,(\beta z) \\ \alpha\,(\beta \overline{z}) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} \beta z \\ \beta \overline{z} \end{pmatrix} = \alpha\left(\beta\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}\right)$$

- פילוג בסקלר- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} \in V$ $\alpha,\beta \in \mathbb{F},$ אז

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\, z \\ (\alpha+\beta)\, \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + \beta z \\ \alpha \overline{z} + \beta \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta z \\ \beta \overline{z} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

- פילוג בווקטורים- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix} \in V$ $\alpha \in \mathbb{F},$ אז

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} z+w \\ \overline{z}+\overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,(z+w) \\ \alpha\,(\overline{z}+\overline{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z + \alpha w \\ \alpha \overline{z} + \alpha \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z \\ \alpha \overline{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha w \\ \alpha \overline{w} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} w \\ \overline{w} \end{pmatrix}$$

- סקלר היחידה- יהיו $\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} \in V$ $1 \in \mathbb{F},$ אז

$$1\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1z \\ 1\overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}$$

שאלה 4. האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים?

1. האם $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = x \right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתארת) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

כן, הוא תת מרחב,

(א) נבדוק ש- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ ואכן הוא מקיים $y = 0 = 0 = x$ לכן $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

(ב) יהיו $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אז

$$u + \alpha v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ y_1 + \alpha y_2 \\ z_1 + \alpha z_2 \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$y_1 + \alpha y_2 \;=\; x_1 + \alpha x_2$$

מכיוון ש- $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ לכן

$$u + \alpha v \in W$$

אוסף כל הנקודות ב- $\mathbb{R}^3$ עם תנאי לינארי מתאר מישור כלומר $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = x \right\}$ מתארים מישורים ב- $\mathbb{R}^3$

---

2. האם $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ :\ z=2y+3,\ y=x\right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתארת) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא, הוא לא תת מרחב ווקטורי, נשים לב שאינו מקיים את שני התנאים לתת מרחב

(א) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\notin W$ כי

$$z=0\neq 2\cdot 0+3=2y+3$$

(ב) ניקח

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\in W,\ v=\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}\in W$$

אך החיבור

$$u+v=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\12\end{pmatrix}\notin W$$

אוסף כל הנקודות ב-$\mathbb{R}^3$ עם שני תנאים לינארים מתאר את ישר חיתוך בין שני המישורים (אם קיים) כלומר

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ :\ z=2y+3,\ y=x\right\}$$

מתאר את ישר החיתוך בין שני המישורים

3. האם $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ z^2=x^2+y^2\right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתארת) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\in V,\ v=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}\in W$$

אך החיבור

$$u+v=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\notin W$$

במקרה הזה -$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W$ כי $0^2=0^2+0^2$

הצורה הזאת היא קונוס

---

4. האם $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x^2+y^2+z^2\le 36\right\}$ (אתגר- נסו לחשוב מה הצורה הזאת מתארת) הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

לא תת מרחב, ניקח

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in W$$

אך עם נכפיל ב-6 נקבל

$$6u=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}\notin W$$

במקרה הזה - $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W$ כי $0^2+0^2+0^2=0\le 36$

הצורה הזאת כדור (עם הפנים) בעל רדיוס 6

5. האם $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: 2^{3x+z}=8^{2x-y}\right\}$ הוא תת מרחב ווקטורי של $\mathbb{R}^3$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

כן, הוא תת מרחב, ראשית נשים לב ש-

$$\begin{gathered}2^{3x+z}=8^{2x-y}\\ \Updownarrow\\ 2^{3x+z}=8^{6x-3y}\\ \Updownarrow\\ 3x+z=6x-3y\\ \Updownarrow\\ 3x-3y-z=0\end{gathered}$$

לכן $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: 3x-3y-z=0\right\}$.

(א) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in W$ כי $3\cdot 0-3\cdot 0-0=0$

(ב) יהיו $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\in W, v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\in W, \alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$u+\alpha v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+\alpha v_1\\u_2+\alpha v_2\\u_3+\alpha v_3\end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\begin{aligned} 3(u_1+\alpha v_1)-3(u_2+\alpha v_2)-(u_3+\alpha v_3) &= \\ 3u_1-3u_2-u_3+\alpha(3v_1-3v_2-v_3) &= \\ 0+\alpha\cdot 0 &= \\ 0 \end{aligned}$$

לכן $u+\alpha v\in W$

6. האם $W=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ : a_{12}=a_{21}=0\right\}$ הוא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ביחס לחיבור וכפל בסקלר הרגילים?

פתרון.

כן, הוא תת מרחב,

(א) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in W$ כי $a_{12}=a_{21}=0$

(ב) יהיו $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in W, \alpha\in\mathbb{R}$ אז

$$u+\alpha v=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha b_{11} & a_{12}+\alpha b_{12} \\ a_{21}+\alpha b_{21} & a_{22}+\alpha b_{22}\end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\begin{cases} a_{12}+\alpha b_{12} = 0+\alpha 0 = 0 \\ a_{21}+\alpha b_{21} = 0+\alpha 0 = 0 \end{cases}$$

לכן $A+\alpha B\in W$

בהצלחה!!