

תרגיל בית 2 בחשבון אינפיניטסימלי 2 89-133 סמסטר ב' תשע"ה

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא עד התרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ג ניסן ה'תשע"ה, 12.4.2015.

שאלה 1. תהא $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$. הראנו כי גם $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי גם מתקיים

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

שאלה 2. תהא $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בכל קטע סופי, ומחזורית עם מחזור $T > 0$ (כלומר $f(x+T) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$). הוכיחו שהאינטגרל $I(a) = \int_a^{a+T} f(x) dx$ אינו תלוי ב- a .

שאלה 3. חשבו את האינטגרלים הלא מסוימיים הבאים:

1. $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

3. $\int (5x-2)^7 dx$

4. $\int \frac{a}{\sqrt{b-cx^2}} dx$ עבור $a, b, c > 0$ קבועים.

5. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ (רמז: שיטת ההצבה).

6. $\int \frac{e^x}{e^x + \sqrt{e^x}} dx$ (רמז: שיטת ההצבה).

7. $\int \frac{2(x^3-2x^2+x)}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (רמז: שיטת ההצבה).

8. $\int x^6 \sqrt{2x+3} dx$ (רמז: שיטת ההצבה).

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ (רמז: שיטת ההצבה, או שימוש בזהות טריגונומטרית ידועה).

10. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} dx$ (רמז: שיטת ההצבה).

11. $\int x \ln^2 x dx$ (רמז: אינטגרציה בחלקים).

$$.12 \int \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ (רמז: אינטגרציה בחלקים.)}$$

$$.13 \int \sin(\ln x) dx \text{ (רמז: אינטגרציה בחלקים.)}$$

$$.14 \int e^{2x} \sin^2 x dx \text{ (רמז: } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\text{)}$$

שאלה 4. הוכיחו כי לכל $0 \leq k \leq n$ שלמים מתקיים

$$\binom{n}{k}^{-1} = (n+1) \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$

כאשר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. רמז: אינטגרציה בחלקים ואינדוקציה.

בהצלחה!