

$$Q = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} + Q'_k$$

$\uparrow$  כוחות  
 $\uparrow$  כוחות  
 $\uparrow$  חיצוניים

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} + Q'_k$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T-V) = Q'_k$$

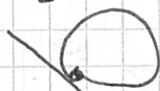
החשבה  
הדומה  
במכניקה

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_i \lambda_i a_{ik}$$

$$\lambda = \frac{mg \sin \phi}{2}$$

$$Q_x = - \frac{mg \sin \phi}{2}$$



$Q_\phi$  - כוח היה מוחלט נח.

נחזור לשאלה.

סימטריה וחוקי שימור

קואורדינטה  $q$  מאפשרת להיות ציבורית אטם.

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}$$

$$L = T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} P_x - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} P_x = 0$$

$$P_x = \text{const}$$

$$M \dot{x} = P_x = \text{const}$$

סימטריה: תנאים חיוניים

ולכן

הרצאה 6

לניח והמסדכת שלנו היא סימטרית ביחס להפצות של

קואורדינטה כלשהי  $q$  כלומר האנרגיה לא משתנה עבור

הצורה הקואורדינטה  $q$

כדי כלומר של  $V$  לא תלוי ישירות ב  $q$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$$

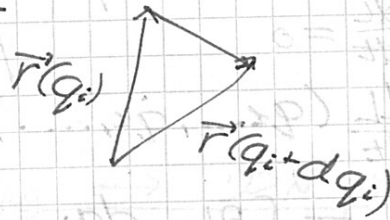
$$p_i = \text{const}$$

$$0 = \dot{p}_i = - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

ול  $q_3$

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \lim_{dq_i \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_j(q_i + dq_i) - \vec{r}_j(q_i)}{dq_i}$$

$$\hat{n}_{q_i} := q_i \text{ וקטור יחידה בכיוון}$$



$$\dot{p}_i = \hat{n}_{q_i} \cdot \sum_j \vec{F}_j$$

ההטלה של  $q_i$  על סכום הכוחות שווה 0-5

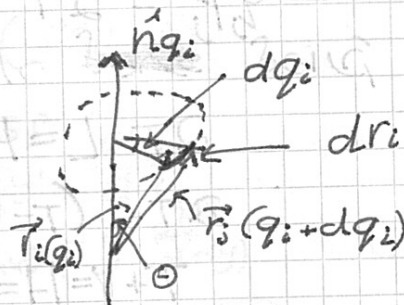
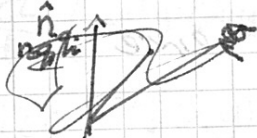
דבריו נעזרים לסמינריות הסיבובים:

האנרגיה לא משתנה תחת סיבובים סביב ציר מסוים.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \Rightarrow \hat{n}_{q_i} \times \vec{r}_j$$



$$|d\vec{r}_j| = r_j \sin \theta dq_i$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right| = r_j \sin \theta$$

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \hat{n}_{q_i} \times \vec{r}_j$$

$$Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_j \vec{F}_j \cdot (\hat{n}_{q_i} \times \vec{r}_j)$$

$$Q_i = \sum_j \hat{n}_{q_i} \cdot (\vec{r}_j \times \vec{F}_j) = \hat{n}_{q_i} \cdot \sum_j (\vec{r}_j \times \vec{F}_j) = \hat{n}_{q_i} \cdot \vec{\tau}$$

$$\dot{p}_i = Q_i = \hat{n}_{q_i} \cdot \hat{n}_{q_i} \cdot \vec{\tau}$$

$$\dot{p}_i = 0$$

וכאשר המערכת צפה לך  
סטטיסטית

אז הטורק המכני של  $\int -0$ .

- סימטריה ביחס להצבה במאן וטורק של  $\int$  שומר אנרגיה.

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dt}(q_1, \dots, q_n, \dots)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right\}$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right\}$$

$$\xrightarrow{E-L} \frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i p_i - L \right) = 0$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

עבור פונקציות של ארטיקולריות  $\dot{q}_i$  ו  $q_i$

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = 2T$$

שימוש במשפט אולר ~~ל~~  $\frac{d}{dt}$  פונקציה הומוגנית

$$2T - L = H$$

$$2T - (T - V) = H$$

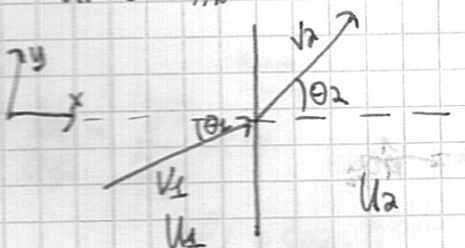
$$T + V = H = \text{const}$$

האנרגיה קבועה.

באמצעות: התקיק ברם מסה  $m$  נע במהירות  $V_1$

פחצי מרחב היכן שהאנרגיה הפוטנציאלית שלו שווה  $\epsilon$  ו  $u_1$

הוא עובר פחצי מרחב שם האנרגיה הפוטנציאלית שווה  $\epsilon$  ו  $u_2$



מה הישגיו הכיוון תנועת התקיק?

אפשר לראות שהאנרגיה לא תלויה

מאמן ואנרגיה  $\epsilon$  אלו יש

שימור אנרגיה

$$mV_1 \sin \theta_1 = mV_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + U_1 = \frac{1}{2} m V_2^2 + U_2$$

$$V_1^2 \left( 1 + (U_1 - U_2) \frac{2}{m V_1^2} \right) = V_2^2$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{1 + \frac{2}{m V_1^2} (U_1 - U_2)}$$

Scaling ↔ דיליון מכני

שינוי הסקלה של המיקום דליליון מכני

$$L \rightarrow \sum L$$

$$r_i \rightarrow \alpha r_i$$

קטגוריה

$$t \rightarrow \beta t$$

השאלה היא האם ישנה שימור אנרגיה

פונקציה הומוגנית ומשפט אוילר

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$$

$f(x, y)$  היא פונקציה הומוגנית אם:

$$x' = \alpha x, y' = \alpha y$$

$$\frac{d}{d\alpha} (\alpha^n f(x, y)) = \frac{d}{d\alpha} (f(x', y'))$$

$$n \alpha^{n-1} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{dx'}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{d\alpha}$$

$$n \alpha^{n-1} f(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$n f(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$n f(r_1, r_2, \dots, r_n) = \sum_i r_i \frac{\partial f}{\partial r_i}$$

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2 - U(r_1, r_2, r_3, \dots)$$

$$L' = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \frac{d(\alpha r_i)}{d(\beta t)} \right)^2 - U(\alpha r_1, \alpha r_2, \alpha r_3, \dots)$$

$$L' = \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2 - \alpha^k U(r_1, \dots, r_n)$$

$$L' = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sum_i \frac{1}{2} m_i \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2 - \alpha^k U(r_1, r_2, \dots)$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k$$

$$L' = \alpha^k L$$

$$k < 1$$

שינוי  
המיקום  
Scaling =

החוק  
ההוא

$$\beta = \alpha^{1-1/2}$$

s/c

$\alpha$  זה המעלה s/c

החזקה ו  
הזמן

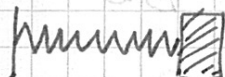
הזמן כבוד pde

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-1/2}$$

$$\frac{t'}{t} = \frac{\beta t}{t} = \beta \quad \frac{l'}{l} = \frac{\alpha l}{l} = \alpha$$

$$\beta = \alpha^{1-1/2}$$

2 גורם החדירה  $\leftarrow U(x) = \frac{1}{2} k x^2$



קבוע המרחק בסוללות:

קפ"ל:

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{A_{\text{gen}}}{A_{\text{rel}}}\right)^{1-1/2} = \left(\frac{A_{\text{gen}}}{A_{\text{rel}}}\right)^0 = \left(\frac{A_{\text{gen}}(t)}{A_{\text{rel}}(t)}\right)_{t=0}$$



$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1-\frac{(-1)}{2}} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}$$

חלק 3 מכתה עברת עם אילוסטרציות

$$L(q, \dot{q}, t)$$

יש ע"י: עברת בן

$$f(q)$$

holonomic

הוא/היא קולות

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$$

I

הוא/היא קולות = הן

הן נכנסות = הן קולות + הן

$$L' = L + \lambda f$$

II: עברת בן מוכר

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q}$$

הוא E-L

$$x^2 + y^2 = R^2$$

הוא/היא עברת בן

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$Q_i = \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

הוא/היא עברת בן קולות