מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 5

תרגיל 1. ציין האם הקבוצות הבאות ת"ל או בת"ל, ובמקרה של ת"ל יש להציג את אחד הווקטורים כצירוף לינארי של השאר.

1. $$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

2. $$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

3. $$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. $$B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. $$B_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 2. הוכח

1. יהי $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ קבוצה בת"ל אז הקבוצה $L_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$בת"ל כאשר $w_i = v_1 + v_i$

2. יהי $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ קבוצה בת"ל אז הקבוצה $L_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ בת"ל כאשר $u_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_i$

תרגיל 3.

1. האם הווקטור $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב הנפרש על ידי

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

, ואם כן מצא את הצירוף הלינארי המתאים לו.

2. מהסעיף הקודם הסק את הפתרון למערכת

$$\begin{cases} x+y+2z & = & 1 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 1 \end{cases}$$

תרגיל 4. (מאתגר)

$S_1=\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\in\mathbb{R}^3, S_2=\left\{\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\right\}\in\mathbb{R}^3$ האם מתקיים?

1. $Span\left\{S_1\right\}\nsubseteq Span\left\{S_2\right\}$
2. $Span\left\{S_2\right\}\nsubseteq Span\left\{S_1\right\}$
3. $Span\left\{S_1\right\}=Span\left\{S_2\right\}$

תרגיל 5. תהי

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

פורשת את $\mathbb{R}^3$, ו-

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בת"ל, לכל a וקטור ב-A מצא וקטור $b\in B$ כך ש-$A/\left\{a\right\}\bigcup\left\{b\right\}$ יהיה בת"ל

תרגיל 6. האם הקבוצה $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$?

תרגיל 7. האם הקבוצה $B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$?

בהצלחה!!