פתרון המבחן מהקישור הבא.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)$

ב. $\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\frac{1}{x-e}}$

ג. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x^2}-1\right)\cos\left(\ln(1+x^2)e^x\right)}{1-\cos(3x)}$

סעיף א'

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\left\{0\cdot\frac{1}{2}\right\}=0$$

סעיף ב'

$$\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\frac{1}{x-e}}=\{\ln(x)\to 1\}=e^{\lim_{x\to e}\frac{1}{x-e}(\ln(x)-1)}$$

נחשב בצד

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{e}$$

סה"כ הגבול הוא

$$e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e}$$

סעיף ג':

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{(2x^2)}-1\right)\cos(\ln(1+x^2)\,e^x)}{1-\cos(3x)}$$

$$\frac{\left(e^{(2x^2)}-1\right)\cos(\ln(1+x^2)\,e^x)}{1-\cos(3x)}=\underbrace{\frac{e^{(2x^2)}-1}{2x^2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}}_{\to 2}\cdot\underbrace{\cos(\ln(1+x^2)\,e^x)}_{\to 1}\cdot\frac{2}{9}\to\frac{4}{9}$$

3. לכל אחד מן הטורים הבאים קבעו הם הוא מתכנס בהחלט/ בתנאי/ מתבדר:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sin(n)}{n^2+2}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$

סעיף א'

$$\frac{n+\sin(n)}{n^2+2}$$

נביט בשני הטורים הבאים

$$\sum\frac{n}{n^2+2}\sim\sum\frac{1}{n}$$

ולכן מתבדר

$$\sum\frac{\sin(n)}{n^2+2}$$

מתכנס בהחלט כי הוא קטן מ $\sum\frac{1}{n^2}$ בערך מוחלט.

ולכן הטור מתבדר כי אפשר לפרק אותו לסכום של טור מתכנס בהחלט ומתבדר.

במחשב שנייה, פתרון קל יותר

$$n+\sin(n)\geq 0$$

מדובר בטור חיובי

$$\frac{n+\sin(n)}{n^2+2}\geq\frac{n-1}{n^2+2}\sim\frac{1}{n}$$

גדול יותר ממתבדר ולכן מתבדר.

סעיף ב'

$$\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$$

$0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ ולכן $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$, ולכן מדובר בטור חיובי.

נשווה עם הטור $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \cdot n^2 = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$$

לכן חברים וגם הטור בשאלה מתכנס.

סעיף ג':

$$\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$$

הטור מתכנס לפי דירכלה כי $\frac{1}{\sqrt{n}}$ שואפת מונוטונית לאפס, והססח של $\sin(n)$ חסומה.

$$\sum \frac{|\sin(n)|}{\sqrt{n}} \geq \sum \frac{\sin^2(n)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sum \frac{1-\cos(2n)}{\sqrt{n}}$$

כעת,

$$\frac{1}{2}\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

מתבדר

$$\frac{1}{2}\sum \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$$

מתכנס לפי דיריכלה וסה"כ הסכום מתבדר, והטור שלנו גדול ממנו וגם מתבדר.

ולסיום הטור בשאלה מתכנס בתנאי.

.4

א. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = e^x + e^{-x}$.

ב. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n e^{a_n} + \frac{a_n}{e^{a_n}}$, בהנתן ש $a_1 > 0$.

חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

סעיף א': נגזור, נמצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה, נראה מה קורה בקצוות של תחומי העלייה והירידה (במידת הצורך).

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$
$$f'(x) = e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$$

כאשר $x > 0$ הנגזרת חיובית, וכאשר $x < 0$ הנגזרת שלילית

כלומר הפונקציה יורדת בקטע $(-\infty, 0]$ ועולה בקטע $[0, \infty)$ ולכן הערך הנמוך ביותר שלה מתקבל ב0 והוא

$$f(0) = 2$$

סעיף ב'

$$a_{n+1} = a_n(e^{a_n} + e^{-a_n})$$

קל להוכיח באינדוקציה כי הסדרה חיובית, אדלג על זה כאן, אל תדלגו במבחן.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{a_n} + e^{-a_n} \geq 2$$

המנה של הסדרה החיובית גדולה מ2, ולכן הסדרה מונוטונית עולה.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, היא מתכנסת לגבול סופי $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n(e^{a_n} + e^{-a_n})$$
$$L = L(e^L + e^{-L})$$
$$L\big(1 - (e^L + e^{-L})\big) = 0$$

אין אפשרות בה $e^L + e^{-L} = 1$ לפי סעיף א'.

לכן $L = 0$ אבל הסדרה עולה, ולכן $L \geq a_1 > 0$ וקבלנו סתירה.

סה"כ הסדרה אינה שואפת לגבול סופי וכיוון שהיא עולה היא שואפת לאינסוף.

תרגיל העשרה:

במבחן המנה למדנו שאם

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$$

אזי

$$|a_n| \to \infty$$

כמו כן, ראינו דוגמאות בהן

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

אבל הסדרה מתכנסת לגבול סופי.

כל סדרה חיובית מונוטונית עולה ומתכנסת תהווה דוגמא לכך.

מה לגבי אם נתון לנו מספר $c > 1$ וכן

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > c$$

האם ניתן להסיק כי $|a_n| \to \infty$?

הבעייה – לא בטוח שלמנה יש גבול.

הוכחה:

ראשית נוכיח באינדוקציה כי לכל n

$$|a_n| \geq c^{n-1}|a_1|$$

בדיקה: עבור $n = 1$ מקבלים כי אכן $|a_1| \geq |a_1|$

יהי n עבורו $|a_n| \geq c^{n-1}|a_1|$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > c$$

$$|a_{n+1}| > c \cdot |a_n| \geq c \cdot c^{n-1}|a_1| = c^n|a_1|$$

כיוון ש $c > 1$ אז $c^{n-1} \to \infty$ ולכן לפי חצי סנדוויץ' גם $|a_n| \to \infty$

.5

א. תהי סדרה חיובית $0 < a_n$ ומונוטונית עולה כך שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_{n+k} - a_n \to 0$.

הוכיחו/הפריכו: הסדרה a_n בהכרח מתכנסת לגבול סופי.

ב. תהי פונקציה f הרציפה בכל $\mathbb{R}$, כך ש $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ וגם $\lim_{x\to(-\infty)} f(x) = 0$.

הוכיחו כי הפונקציה חסומה מלמטה (כלומר קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $m \le f(x)$).

סעיף א' – הפרכה

$$a_n = \ln(n)$$

יהי $k \in \mathbb{N}$

$$a_{n+k} - a_n = \ln(n+k) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \to \ln(1+0) = 0$$

סעיף ב':

נב"ש שהפונקציה אינה חסומה מלרע.

ניקח סדרה a_n כך ש

$$f(a_n) \to -\infty$$

ניקח תת סדרה מונוטונית של a_n, ששמה a_{k_n}

$$f(a_{k_n}) \to -\infty$$

וזו סתירה. מדוע?

אם $a_{k_n} \to \infty$ אז $f(a_{k_n}) \to \infty$ כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

אם $a_{k_n} \to -\infty$ אז $f(a_{k_n}) \to 0$ כי $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

אם $a_{k_n} \to x_0 \in \mathbb{R}$ אז $f(a_{k_n}) \to f(x_0)$ בזכות הרציפות.

אין אופציה אחרת, כי a_{k_n} מונוטונית.

דרך נוספת.

כיוון ש $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ קיים $M_1 > 0$ כך שלכל $x > M_1$ מתקיים כי $f(x) > 1$

כמו כן, כיוון ש $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ קיים $M_2 > 0$ כך שלכל $x < -M_2$ מתקיים כי $f(x) > -1$

כעת, בקטע $[-M_2, M_1]$ הפונקציה רציפה בקטע סגור ולכן לפי ויירשטראס חסומה. כלומר קיים איזה d כך שלכל x בקטע מתקיים כי $f(x) > d$

לכן בכל הממשיים מתקיים כי

$$f(x) > \min\{-1, 1, d\}$$