

אנליזה 1 תרגיל 4

1. תהא a_n סדרה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $a_n \rightarrow 0$ אז a_n מונוטונית יורדת.

(ב) אם $a_n \rightarrow 0$ ולכל n מתקיים $0 \leq a_n$ אז a_n מונוטונית יורדת.

(ג) אם a_n סדרה מונוטונית עולה של מספרים חיוביים אז גם הסדרה b_n המוגדרת $b_n = (a_n)^2$ מונוטונית עולה.

(ד) אם a_n סדרה מונוטונית יורדת של מספרים חיוביים אז גם הסדרה b_n המוגדרת $b_n = (a_n)^2$ מונוטונית יורדת.

2. נגדיר סדרה

$$a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

(א) הוכיחו ש a_n מונוטונית עולה.

(ב) הוכיחו ש a_n חסומה. הדרכה: שימו לב שלכל n מתקיים $2^{n-1} \leq n!$.

3. יהא $a > 0$. נגדיר $a_1 = a$ ולכל n טבעי נגדיר $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$.

(א) עבור אילו ערכי a הסדרה עולה? הוכיחו שבמקרה זה הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.

(ב) עבור אילו ערכי a הסדרה יורדת? הוכיחו שבמקרה זה הסדרה מתכנסת ומצאו את גבולה.