בס"ד

**מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ז סמסטר קיץ מועד א**

מרצים: ד"ר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט.

**הוראות הפעלה:**

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 20 נקודות.

שאלה ציון

|  |  |
| --- | --- |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

ציון:

**בהצלחה**

**שאלה 1**

**סעיף א (5 נקודות)**

מי מהפסוקים הבאים הוא טאוטולוגיה? נמקו!

1. .
2. 

(זכרו כי )

**סעיף ב (15 נקודות)**

תהיינה  קבוצות כלשהן הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

* 1. .
  2. .

**הערה:** אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

**תשובה לשאלה 1**

**סעיף א1**

טאוטולוגיה. נובע במידי מכללי היסק.

**סעיף א2**

לא טאוטולוגיה. עבור ההצבה  ,

נקבל כי  וגם .

שזה גורר כי הפסוק בסעיף א2 שקרי.

**סעיף ב1**

נכון. הוכחה



נתון ש . יהי . על פי הגדרת קבוצת החזקה .

נתון  ולכן . על פי הגדרת קבוצת החזקה .

הוכחנו שאם  אז  ז"א .



נתון ש . יהי  על פי הגדרת ההכלה . על פי הגדרת קבוצת החזקה . על פי הנתון  נקבל . על פי הגדרת קבוצת החזקה  ועל פי הגדרת ההכלה . הוכחנו שאם  אז  ז"א .

**סעיף ב2**

לא נכון. דוגמה נגדית

. .

שימו לב:  אבל .

**שאלה 2**

**סעיף א (10 נקודות)**

תהיינה  קבוצות ו  פונקציות.

הוכח או הפרך, ע"י דוגמה נגדית, כל אחד מהסעיפים הבאים:

1. ****  על גורר ש **** על.
2. **** הפיכהו **** הפיכה גורר ש  הפיכה.

**סעיף ב (10 נקודות)**

תהיינה  קבוצות. נגדיר  ע"י  הוכיחו כי  חח"ע אם ורק אם .

**הערה:** אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

**תשובה לשאלה 2**

**סעיף א1**

לא נכון. דוגמה נגדית





**** פונקציה על אבל הפונקציה **** לא על.

**סעיף א2**

נכון.

**** הפיכה, ולכן **** פונקציה על ולפי טענה מהרצאה **** על.

**** הפיכה, ולכן **** חח"ע ולפי טענה מהרצאה **** חח"ע.

סה"כ **** חח"ע ועל ז"א **** הפיכה.

**סעיף ב**



. יהי  על פי הגדרת קבוצת חזקה  נתון ש , ולכן .

. קיבלנו את פונקציה חח"ע.



אם  סיימנו כי קבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה.

נניח ש .

יהי . על פי הגדרת קבוצת החזקה . .

אם  אז נקבל סתירה לחח"ע כי  ואז . סה"כ נקבל  בסתירה לחח"ע.

סה"כ נקבל ש  כלומר .

**שאלה 3 (20 נקודות)**

1. תנו דוגמה לקבוצה  כך שלכל שתי קבוצות שונות  מתקיים כי .
2. תהי  כך שלכל שתי קבוצות שונות  מתקיים כי , הוכיחו כי  בת מנייה.
3. תהי  ותהי  קבוצה כך שלכל שתי קבוצות שונות  מתקיים . הוכיחו כי  בת מנייה.
4. תהי  כך שלכל שתי קבוצות שונות    
   מתקיים כי . הוכיחו ש  בת מניה.  
   רמז: הביטו ב, כאשר   
   , .

**תשובה לשאלה 3**

**סעיף א**



**סעיף ב**

מספיק להראות שיש פונקציה חח"ע .

לכל  נקבל ש  כלומר  ולכן קיים לו איבר קטן ביותר. נסמן אותו ב , ונגדיר .  
כמו כן, נגדיר .

כל האיברים ב  זרים, ולכן  חח"ע.

סה"כ קיבלנו ש  בת מניה.

**סעיף ג**

נבנה פונקציה  המוגדרת ע"י .

ואז  קבוצה שכל איבריה זרים. על פי סעיף ב  בת מניה.

נשאר להוכיח ש  חח"ע. נניח ש  כלומר .

אם  אז יש לנו שתי אפשרויות:

אפשרות 1: . על פי הגדרת  נקבל ש .

 וגם  אם  נקבל סתירה לשוויון .

אפשרות 2:  ואז . נתון ש  ולכן  ועל פי הגדרת ההפרש .

הוכחנו ש . באותו אופן בדיוק אפשר להוכיח ש .

סה"כ נקבל ש  כדרוש.

**סעיף ד**

תהי  כלומר .   
ברור כי לכל  מתקיים כי  וכיוון ש

נובע כי החיתוך בין כל שתי קבוצות שונות ב הוא בדיוק 

(כלומר ).

לכן לפי סעיף ג' מתקיים כי  בת מנייה.

נסמן ב. ברור כי  הרי כל קבוצה ב מכילה קבוצה כלשהי בגודל 10, או שהיא בעצמה בגודל שקטן ממש מ10.

כיוון שאוסף **כל הקבוצות הסופיות** של הטבעיים הוא בן מנייה, נובע כי  בנות מנייה וסה"כ  היא איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה.

**שאלה 4**

**סעיף א (10 נקודות)**

הוכיחו שלכל קבוצה  מתקיים .

**סעיף ב (10 נקודות)**

נגדיר יחס  על  באופן הבא:



1. הוכיחו ש  הוא יחס שקילות.
2. מצאו את מחלקות השקילות  ואת מחלקת השקילות הכללית , כאשר .
3. כתבו את קבוצת המנה . מהי המשמעות הגיאומטרית של קבוצת המנה? (כאשר אנו מסתכלים על  בתור המישור).

**תשובה לשאלה 4**

**סעיף א**

תהיי  קבוצה כלשהי נוכיח תחילה ש .

נוכיח שלא קיימת פונקציה מ  על .

תהיי  אז לכל  נקבל ש .

קיימות שתי אפשרויות: אפשרות 1:  אפשרות 2: .

תהיי . נניח שקיים  כך ש .

אם  נקבל לפי הגדרת  ש  בסתירה לכך ש .

אם  נקבל מהגדרת  ש  בסתירה לכך ש .

קיימת פונקציה חח"ע  .

סה"כ נקבל  וגם  כלומר .

**סעיף ב1**

רפלקסיביות

יהי .  ולכן .

סימטריות

נניח ש . על פי הגדרת היחס  נקבל ש  ואז  ושוב על פי הגדרת היחס  נקבל .

טרנזיטיביות

נניח ש  וגם . על פי הגדרת היחס  נקבל  וגם  כלומר  ושוב על פי הגדרת היחס  נקבל  כדרוש.

**סעיף ב2**



.

**סעיף ב3**

. אוסף כל הישרים שמקבילים לציר ה .

**שאלה 5**

**סעיף א (10 נקודות)**

תהי  ותהי . נגדיר סדרת קבוצות ע"י   
, . הוכיחו באינדוקציה כי לכל  מתקיים .

***סעיף ב (10 נקודות)***

*הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:*

1. *בגרף מסדר  לא יתכן שסכום דרגות כל קדקודיו יהיה: .*
2. *קיים גרף מסדר 6 שדרגות קדקודיו הן: 1,2,3,4,4,5.*
3. *לכל גרף עם מסלול אוילר ניתן להוסיף צלע ולקבל גרף עם מעגל אוילר.*

***תשובה לשאלה 5***

***סעיף א***

*בסיס האינדוקציה:*

*עבור *

*.*

*אם  אז קיים  כך ש .*

*אפשרות 1:  ואז  על פי הגדרת ההפרש* *.*

*אפשרות 2:  ואז על פי הגדרת ההפרש* *.*

*הראינו שאם  אז בהכרח* *, ולכן* *.*

*שלב האינדוקציה:*

*נניח ש*  *צ"ל* *.*



*נשאר להראות ש* *.*

*נניח ש .*

* ז"א קיים  כך ש . קיבלנו  בסתירה לכך ש*  *ז"א . ואז*  *כדרוש.*

*הערה: ניתן להוכיח בדרך נוספת: להוכיח ש  לכל*  *טבעי.*

***סעיף ב 1***

*נכון. בגרף מסדר  דרגת כל קדקוד הוא לכל היותר  אז סכום הדרגות הוא לכל היותר  ועבור  טבעי נקבל *

***סעיף ב2***

*לא. סכום הדרגות בגרף לא מכוון חייב להיות זוגי.*

***סעיף ב3***

*לא נכון. דוגמה נגדית. גרף עם שני קדקודים וצלע אחת.*