

פרק 4

פונקציות

4.1 כללי

כשם שפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המטופלת במסגרת חשבון דיפרנציאלי מאוהה בעצם עם הגרף שלה שהוא העקום במישור $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המורכב מכל הזוגות מהצורה $(x, f(x))$, נגדיר באופן כללי פונקציה f מקבוצה A (התחום) לקבוצה B (הטווח), כתת קבוצה של $A \times B$ כך שלכל $a \in A$ יש $b \in B$ יחיד כך שמתקיים $(a, b) \in f$. במקרה כזה נסמן גם $b = f(a)$, כמקובל.

הקבוצה $\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, למשל, מתארת את הפונקציה: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

אותה קבוצה מתארת גם את הפונקציה: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

הקבוצה $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge xy = 1\}$ אינה מתארת פונקציה מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R} כי עבור $x = 0$ אין y מתאים. היא כן מתארת פונקציה מ- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ל- \mathbb{R} .

גם הקבוצה $\{(x, y) \mid x \in (0, \infty), y \in \mathbb{R} \wedge x = y^2\}$ אינה מתארת פונקציה, כי לכל x יש שני ערכי y אפשריים.

ולבסוף אם

A - קבוצת תתי הקבוצות בגודל 2 של \mathbb{R}

B - קבוצת הזוגות הסדורים $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

אז הקבוצה $\{(\{x, y\}, (x, y)) \mid \{x, y\} \in A\}$ אינה מתארת פונקציה מ- A ל- B , שכן לאותו

ערך בתחום $\{x, y\} = \{y, x\}$ מתאימים שני ערכים שונים בטוח $(x, y) \neq (y, x)$.

שתי פונקציות ייחשבו שוות כאשר הן שוות כקבוצות של זוגות סדורים. קל לראות כי התנאי הוא שיש להן אותו תחום ואותה פעולה. שתי הפונקציות הבאות למשל,

$$(\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}, \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$$

$$(\{(x, \sin x) \mid x \in (0, \infty)\}, \sin: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$$

אינן שוות כי יש להן תחום שונה.

עם זאת קיים ביניהן קשר ברור - הפונקציה השניה מתקבלת מצמצום הפונקציה הראשונה לתחום $(0, \infty)$.

באופן כללי אם f פונקציה מ- A ל- B , $D \subseteq A$, אזי הפונקציה $f \cap (D \times B)$ מ- D ל- B קרויה הצמצום של f ל- D ומסומנת $f|_D$. קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- B תסומן B^A .

