אביב תשע"ט

פיסיקה למתמטיקאים

דינמיקה במרחב הפאזה

1. נתחו את התנועה במרחב הפאזה עבור ההמילטוניאן

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta. \tag{1}$$

ציירו את הזרימה במרחב הפאזה כאשר $\omega < \Omega \equiv \sqrt{g/R}$.

נסמן $\delta\theta = \theta - \theta_0,\ \delta p = p - p_0$

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta\theta} \\ \dot{\delta p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\theta \\ \delta p \end{pmatrix} \tag{2}$$

נרשום תחילה את משוואות המילטון

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{mR^2}, \tag{3}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta. \tag{4}$$

נחשב את מטריצת היעקביאן ב 3 נקודות שווי המשקל $(\theta_0, p_0) = \{(0,0), (\pi,0), (\theta,0)\}$ בהתאמה, כאשר θ מקיימת $\cos\theta = -\Omega^2/\omega^2$ ואת הע"ע בכל מקרה. נקבל

(א)

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mR^2} \\ mR^2(\omega^2+\Omega^2) & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

עם ע"ע

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{\omega^2+\Omega^2} \tag{6}$$

ולכן $(0,0)$ נקודת אוכף.

(ב)

$$A(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mR^2} \\ mR^2(\omega^2-\Omega^2) & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

עם ע"ע

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} \tag{8}$$

ולכן עבור $\omega < \Omega$ $(\pi, 0)$ נקודת אוכף. אחרת, עבור $\omega > \Omega$, (8) מדומים טהורים ולכן $(\pi, 0)$ נקודה מרכזית. [1]

עבור $\omega = \Omega$ נקבל ע"ע מנוון $\lambda = 0$ עם ו"ע $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן הפתרון נתון ע"י

$$\begin{pmatrix} \delta\theta \\ \delta p \end{pmatrix} = \omega_0 t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m\omega_0 R^2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

כאשר ω_0 המהירות הזויתית הקבועה המתאימה.

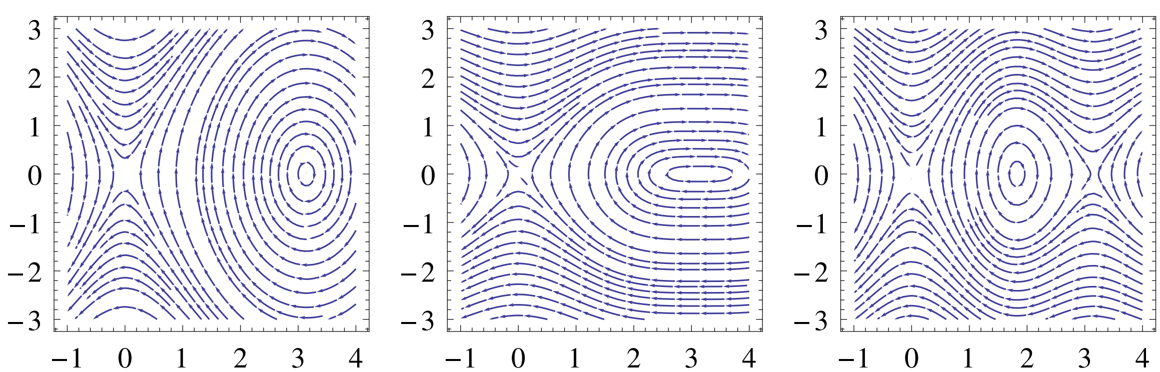
(ג)

$$A(\theta, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mR^2} \\ mR^2\omega^2\cos 2\theta + mR^2\Omega^2\cos\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

ובהצבת $\cos\theta = -\Omega^2/\omega^2$ נקבל את ה ע"ע

$$\lambda_{\pm} = \pm i\omega\sqrt{1 - (\Omega/\omega)^4}, \tag{11}$$

כאשר התנאי $\omega < \Omega$ מבטיח כי (11) מדומים טהורים ולכן $(\theta, 0)$ מרכזית.
בשרטוט מתוארת הזרימה במרחב הפאזה (משמאל לימין) עבור
$\omega > \Omega, \omega = \Omega, \omega < \Omega$ בהתאמה. ניתן לראות כי כאשר $\omega < \Omega$, בנוסף לנקודות האוכף $(0, 0), (\pi, 0)$, קיימת גם נקודה מרכזית יציבה $(\theta, 0)$.



[1] בסביבת נקודה מרכזית התנועה היא על מסלולים סגורים.