

זמן המבחן: 3 שעות. מבחן פתוח: כל חומר עזר מותר. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו פתרון למד"ר $y' = x(y - y^3)$ המקיים $y(0) = \frac{1}{2}$.

זוהי משוואת ברנולי $y' - xy = -xy^3$.

נציב $z = y^{-2}$ ולכן $z' = -2y^{-3}y' = \frac{-2}{y^3}y'$

לכן $\frac{z'}{-2} - xz = -x$ כלומר $z' + 2xz = 2x$

זו כמובן מד"ר לינארית מסדר ראשון ופתרונה הוא:

$$z = e^{-\int 2x dx} \left(\int 2xe^{\int 2x dx} dx + C \right) = e^{-x^2} \left(\int 2xe^{x^2} dx + C \right) = e^{-x^2} (e^{x^2} + C) = 1 + \frac{C}{e^{x^2}}$$

לכן $y^2 = \frac{1}{1 + \frac{C}{e^{x^2}}}$, כיוון שנתון $y(0) = \frac{1}{2}$ נקבל כי $\frac{1}{4} = \frac{1}{1+C}$

לכן $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{e^{x^2}}}}$

2. מצאו פתרון למד"ר $y'' = y'y'$ המקיים $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

כיוון שהמשתנה x אינו מופיע, נוריד את סדר המשוואה.

אנו מחפשים פונקציה p כך שעבור הפתרון היא מקיימת $y' = p(y)$ ולכן $y'' = p'(y)y'$.

נציב במד"ר ונקבל $p'p = py$, ולכן $p'(y) = y$.

$$\text{מכאן נובע כי } p(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$$

לכן הפתרון מקיים את המשוואה $y' = p(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$.

קעת מוטב להשתמש בנתון; נציב $x = 0$ ונקבל כי $1 = \frac{1}{2} + C$.

לכן אנו מחפשים את פתרון המשוואה $y' = \frac{1}{2}(y^2 + 1)$, זו משוואה פרידה.

$$\text{נבצע את הפרדת המשתנים ונקבל } \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{2} dx$$

$$\text{נעשה אינטגרציה ונקבל כי } \arctan(y) = \frac{1}{2}x + C$$

שוב נשתמש בנתון, נציב $x = 0$, ונקבל $\arctan(1) = C$ כלומר $C = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{סה"כ הפתרון הסופי הינו } y = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

3. מצאו פתרון למערכות המד"ר הבאות:

$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 0 \quad \text{א.} \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

המד"ר היא מהצורה $\vec{y}' = A\vec{y}$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

זו מטריצה לכסינה עם ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ המתאים לע"ע 1, וו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ המתאים לע"ע -1.

לכן הפתרון הוא $\vec{y} = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל כי $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ולכן $c_1 = c_2 = 1$.

לכן סה"כ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, במילים אחרות $y_1 = e^x + e^{-x}$
 $y_2 = e^x - e^{-x}$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 1 \quad \text{המקיים} \quad \begin{cases} y_1'' = y_2 \\ y_2'' = y_1 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$y_1'(0) = 1, y_2'(0) = -1$$

הפעם המד"ר היא מהצורה $\vec{y}'' = A\vec{y}$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אותה המטריצה מסעיף קודם.

$$\vec{y}'' = f'' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A\vec{y} = Af \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{אם נציב } \vec{y} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נקבל כי}$$

לכן עלינו לפתור את המד"ר $f'' = f$, ונקבל כי הפתרון הכללי הוא מהצורה $\vec{y} = (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{y}'' = f'' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A\vec{y} = Af \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{אם נציב } \vec{y} = f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ נקבל כי}$$

לכן עלינו לפתור את המד"ר $f'' = -f$, ונקבל כי הפתרון הכללי הוא מהצורה

$$\vec{y} = (c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן סה"כ הפתרון הכללי למד"ר הינו $\vec{y} = (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x)) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x)$$

$$y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \sin(x) - c_4 \cos(x) \quad \text{ולכן}$$

$$y_1 = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} + \sin(x)$$

$$y_2 = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - \sin(x)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את הפתרון הסופי

4. מצאו פתרון למד"ר $y' = -1 - \frac{x^2 + 1}{3x^2 + 2xy}$ המקיים $y(-1) = 1$.

זו בעצם המד"ר $(3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + 1)dy = 0$ כלומר $(x^2 + 1)dy = -(3x^2 + 2xy)dx$

נזכור כי מד"ר $Pdx + Qdy = 0$ היא מדויקת כאשר $P_y = Q_x$.

במקרה זה, אכן נגזור ונקבל כי $P_y = Q_x = 2x$.

לכן נבצע אינטגרציה $U(x, y) = \int Pdx = \int (3x^2 + 2xy)dx = x^3 + x^2y + c(y)$

נעת $U_y = Q$ ולכן $x^2 + c'(y) = x^2 + 1$

לכן $c'(y) = 1$ ולכן $c(y) = y$.

סה"כ $U(x, y) = x^3 + x^2y + y$, ולכן פתרון המד"ר מקיים את המשוואה הסתומה $x^3 + x^2y + y = C$.

נציב את תנאי ההתחלה $x = -1$ ונקבל כי $-1 + 1 + 1 = C$ ולכן $C = 1$.

ביחד $x^3 + y(x^2 + 1) = 1$ וסה"כ הפתרון הסופי הינו $y = \frac{1 - x^3}{x^2 + 1}$.

5. מצאו פתרון למד"ר $y'' = (2 + 4x^2)y$ המקיים $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

נחפש פתרון ששווה לטור חזקות $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

מתנאי ההתחלה אנו יודעים כי $a_0 = 1, a_1 = 0$.

נציב במד"ר את טור החזקות ונקבל את המשוואה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

נזיז את האינדקסים ונקבל כי $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = 2a_0 + 2a_1x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + 4 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

נבצע השוואת מקדמים:

$$2a_2 = 2a_0 \text{ ולכן } a_2 = 1$$

$$6a_3 = 2a_1 \text{ ולכן } a_3 = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = 2a_n + 4a_{n-2} \text{ כי } n \geq 2 \text{ מתקיים}$$

נציב על מנת לגלות את החוקיות.

ראשית, כל המקדמים האי זוגיים מתאפסים.

$$\text{שנית, נקבל כי } a_4 = \frac{1}{2}, a_6 = \frac{1}{6}, a_8 = \frac{1}{24}, \dots \text{ ובאופן כללי } a_{2n} = \frac{1}{n!}$$

$$\text{לכן הפתרון הוא } y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{(x^2)}$$