

## בוּחַן בַּפּוֹנְקָצִיּוֹת מְרוֹכְבוֹת

יש לענות על 3 מתוך 4 שאלות. משקל כל שאלה 33 נקודות (טווח הציונים הוא 100-1). משך הבוחן 100 דקות.

1. (א) (17 נק') נתונה פונקציה  $f(z) = (z-1)(\operatorname{Re} z)^2$ . מצאו את כל הנקודות שבהן היא גזירה ואת כל הנקודות שבהן היא אנליטית.  
רמז: כתבו  $z = x + iy$

(ב) (16 נק') מצאו את כל הפונקציות  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימות ש  $f(z)$  וגם  $f(\bar{z})$  אנליטיות.

2. (א) (16 נק') הוכיחו את הזהות

$$\sin z \cos w = \frac{\sin(z+w) + \sin(z-w)}{2}$$

לכל  $z, w \in \mathbb{C}$ .

(ב) (17 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:  
לכל פונקציה אנליטית  $f(z)$  המוגדרת על  $\mathbb{C}$  ולכל מסילה חלקה  $\gamma$  מתקיים ש

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\gamma} \overline{f(z)} dz$$

3. חשבו את האינטגרל

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt[4]{z}} dz$$

כאשר  $\Gamma$  הוא החצי העליון של המעגל  $|z|=1$  (מכוון נגד כיוון השעון) ו  $\sqrt[4]{z}$  הוא ענף של  $z^{\frac{1}{4}}$  שרציף ב  $\Gamma$  ומקיים  $\sqrt[4]{1} = 1$ .

4. (א) (16 נק') מצאו את כל הפתרונות של המשוואה  $|z|^2 - 2z - 4 + 2i = 0$ .

(ב) (17 נק') חשבו את  $\int_{|z|=2} \frac{\bar{z} + z^2}{(z+1)} dz$  כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

**נוסחאות:**

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$