

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{e^x \cdot \ln(1+x)} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad \text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n!}}{3^n}$$

$$2. \text{ נביט בפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos(x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$?

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

$$3. \text{ נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה } a_{n+1} = a_n \left(2 + \frac{1}{n} \right), \text{ ותנאי ההתחלה } 0 < a_1.$$

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$\text{ב. מצאו את } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

4.

א. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $e^x - x - 1$.

ב. יהי $a \in \mathbb{R}$. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $2e^x = x^2 + 2x + a$.

5. תהי פונקציה f כך שבכל הממשיים $f'' > 0$, וכמו כן $f'(0) = 1$.

א. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \geq x + f(0)$.

$$\text{ב. חשבו את } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \frac{x}{2}.$$