

תרגול אנליזה מודרנית 9

תזכורת: יהי (X, S, μ) ממ"ח. מרחב לבג ממעלה $1 \leq p < \infty$ מוגדר ע"י

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad L^p(X, S, \mu) = \left\{ f : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$. L^p(X), L^p(\mu), L^p(d\mu) \text{ סימונים נוספים הם } L^p(X, S, \mu) = \{f : \|f\|_p < \infty\}$$

ישנו גם המרחב $L^\infty(X)$ המכיל את כל הפונקציות החסומות בעיקר: $L^\infty(X) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}$

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ M : \mu(\{x : |f(x)| \geq M\}) = 0 \right\} \quad \text{או} \quad \|f\|_\infty = \inf_{f \sim g} \sup_{x \in X} |g(x)| = \text{ess sup}_X (f)$$

תזכורת: (א"ש הולדר)

$$\text{אם } p^{-1} + q^{-1} = 1 \text{ ו } 1 < p, q < \infty \text{ אז}$$

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

אי השוויון נכון גם עבור $p=1$ ו $q=\infty$.

1. תרגיל: נניח כי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ברציפות, בעלת "תנאי שפה הומוגניים"

$$\text{וגם } \int_a^b x f f' dm = -\frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי מתקיים } \int_a^b f^2 dm = 1 \text{ ומקיימת } f(a) = f(b) = 0$$

$$\left[\int_a^b (f')^2 dm \right] \left[\int_a^b x^2 f^2 dm \right] \geq \frac{1}{4}$$

פתרון: הכל רציף ולכן נעבוד עם אינטגרל רימן. נשתמש באינטגרציה לפי חלקים:

$$1 = \int_a^b f^2(x) dx = x f^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b 2x f(x) f'(x) dx \Rightarrow \int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

ניקה ערך מוחלט לקבל

$$\frac{1}{2} = \left| \int_a^b x f(x) f'(x) dx \right| \leq \int_a^b |x f(x) f'(x)| dx = \|x f f'\|_1 \stackrel{\text{H\"{o}lder}}{\leq} \|f'\|_2 \|x f\|_2 = \left[\int_a^b (f'(x))^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_a^b x^2 f(x)^2 dx \right]^{1/2}$$

$$\cdot \frac{1}{4} \leq \left[\int_a^b (f'(x))^2 dx \right] \left[\int_a^b x^2 f(x)^2 dx \right] \text{ נעלה בריבוע לקבל}$$

2. תרגיל: יהי (X, S, μ) מ"מ"ח ממידה סופית (כלומר $\mu(X) < \infty$) ויהיו $1 \leq r < p < \infty$. הוכיחו כי $L^p(X, S, \mu) \subseteq L^r(X, S, \mu)$.

פתרון: תהי $f \in L^p$ המספרים $t = \frac{p}{r}, s = \frac{p}{p-r}$ הם מעריכים צמודים (סכום ההופכיים 1), וע"פ א"ש הולדר

$$\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \cdot 1 d\mu = \| |f|^r \cdot 1 \|_1 \leq \left(\int_X (|f|^r)^t d\mu \right)^{1/t} \left(\int_X 1^s d\mu \right)^{1/s} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/t} \mu(X)^{1/s} < \infty$$

ומכאן $\|f\|_r < \infty$ ולכן $f \in L^r$.

דוגמה: המ"מ"ח $([0,1], L, m)$ סופי. ידוע כי $x^{-1/4} \in L^2([0,1])$ ($\int_0^1 x^{-1/2} dm(x) = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2 < \infty$) ולכן מתקיים $x^{-1/4} \in L^1$ או $\int_0^1 x^{-1/4} dm(x) < \infty$.

הערה: אם המ"מ"ח אינו סופי, אין הכלה בשום כיוון.

3. תרגיל: נתבון במ"מ"ח $([0,1], L, m)$, ונגדיר סדרת פונקציות ע"י $g_n(x) = n \cdot I_{[0, n^{-3}]}(x)$.

א. הוכיחו כי לכל $f \in L^2([0,1])$ מתקיים $\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

ב. הראו שיש $f \in L^1([0,1])$ עבורה $\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) \not\rightarrow 0$.

פתרון: א.

$$d \left(\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x), 0 \right) = \left| \int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) - 0 \right| \leq \int_0^1 |f(x) g_n(x)| dm(x) \leq \|f\|_2 \|g_n\|_2$$

$$\|g_n\|_2 = \left(\int_0^1 |n \cdot I_{[0, n^{-3}]}|^2 dm \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 n^2 I_{[0, n^{-3}]} dm \right)^{1/2} = \left(n^2 m([0, n^{-3}]) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

וניתן לחשב

כלומר $\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) - 0 \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ כנדרש (ע"פ תרגיל קודם ניתן להחליף את L^2 בכל $L^{p>2}$).

ב. ניקח $f = x^{-2/3} \in L^1([0,1])$ (f אינטגרבילית לבג כי היא אינט' רימן בהחלט). נחשב

$$\int_0^1 f(x) g_n(x) dm(x) = \int_0^1 x^{-2/3} n dm(x) = 3x^{1/3} n \Big|_{x=0}^{x=n^{-3}} = 3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 \neq 0$$

4. נניח כי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שייכת ל L^p עבור $p > 1$ מסויים וכן גם ב L^1 . הראו כי קיימים קבועים $c > 0$ ו $\alpha \in (0,1)$ כך ש

$$\int_A |f(x)| dx \leq cm(A)^\alpha$$

פתרון: מזה ש $f \in L^1$ אנחנו יודעים כי $\int_A |f(x)| dx < \infty$. מכיוון ש $f \in L^p$ עבור $p > 1$ נסמן

את הנורמה שלו ב $\|f\|_p = c$. עפ"י א"ש הולדר נקבל

$$\|f1_A\|_1 \leq \|f\|_p \|1_A\|_q$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)1_A(x)| dx = \int_A |f(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x) dx \right)^{1/q}$$

$$= cm(A)^{1/q}$$

נותר להראות כי $\frac{1}{q} \in (0,1)$. $\frac{1}{q} \in (0,1)$ כי $q = \frac{p}{p-1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{q} \in (0,1)$.

5. יהי (X, S, μ) מ"ח כך ש $\mu(X) = 1$, ותהי $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית ו f פונקציה קמורה. הוכיחו את אי שוויון יאנסן

$$f\left(\int g d\mu\right) \leq \int f(g) d\mu$$

פתרון: נשתמש בתכונה של פונקציות קמורות: קיים מספר ממשי c כך שמתקיים

$f(y) \geq f(x) + c(y-x)$ לכל $y \in \mathbb{R}$. נציב $x = \int f(g) d\mu$ ו $y = g$ נבצע אינטגרציה לשני

האגפים ונקבל מלינאריות האינטגרל כי

$$\int f(g) d\mu \geq \int f\left(\int g d\mu\right) + c\left(g - \left(\int g d\mu\right)\right) d\mu =$$

$$f\left(\int g d\mu\right) + c\left(\left(\int g d\mu\right) - \left(\int g d\mu\right)\right) = f\left(\int g d\mu\right)$$

הגדרה: מרחב בנך הוא מרחב נורמי שלם, כלומר, מרחב נורמי שבו כל סדרת קושי מתכנסת.

דוגמא: $\mathbb{R}^d, C[a, b]$.

6. תרגיל: יהיו $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ שני מרחבי בנך. ניתן למכפלה הקרטזית $X \times Y$ מבנה

לינארי ע"י $\alpha(x, y) := (\alpha x, \alpha y)$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, ו-

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y$$

הוכיחו כי $(X \times Y, \|\cdot\|)$ מרחב בנך.

פתרון: תהי $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ סדרת קושי ב- $X \times Y$, ויש להוכיח שיש לה גבול שם. ביתר פירוט, לכל

$$\varepsilon > 0 \text{ קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך שאם } m, n \geq N \text{ אזי } \|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)\| < \varepsilon$$

$$\text{מכאן שלכל } \varepsilon > 0 \text{ קיים } N \in \mathbb{N} \text{ כך שאם } \|(x_m - x_n, y_m - y_n)\| = \|x_m - x_n\|_X + \|y_m - y_n\|_Y < \varepsilon$$

$$m, n \geq N \text{ אזי } \|x_m - x_n\|_X < \varepsilon \text{ וגם } \|y_m - y_n\|_Y < \varepsilon. \text{ קיבלנו שהסדרות } \{x_n\} \subseteq X, \{y_n\} \subseteq Y$$

סדרות קושי, ומאחר ואילו מרחבי בנך הסדרות מתכנסות: $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$. נטען כי הגבול של סדרתנו

הוא $(x, y) \rightarrow (x_n, y_n)$. הוכחה:

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|(x_n - x, y_n - y)\| \leq \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0 \text{ מש"ל.}$$