

תרגיל 2

1. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה- p - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני,

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases} \quad \text{וגדירים } k(x, y) = \max\{i : p^i | (x - y)\}$$

א. הוכיחו: $p^n \rightarrow 0$ במטריקה ה- p אדית.
 ב. עבור $z \in \mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה ששואפת ל- z במרחב (\mathbb{Z}, d_3) .
 פתרון:

א. $d_p(p^n, 0) = \frac{1}{p^n} \rightarrow 0$ לכן $p^n \rightarrow 0$

ב. $z \in B(3, \frac{1}{49}) \iff d(3, z) \leq \frac{1}{49} \iff z = 3 \vee k(3, z) \geq 2 \iff z = 3 + 49\mathbb{Z}$
 כלומר, $3 \vee z = 3 + 49x$

2. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי (X, d) . נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x \in X$ ו $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n = x \forall n \geq n_0$

א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
 ב. הוכיחו שבמרחב מטרי דיסקרטי כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.
 פתרון:

א. ניכיר כי במרחב מטרי $x_n \rightarrow x$ אם $d(x_n, x) \rightarrow 0$

ובכן, נוכיח שאם $\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x , אז הסדרה מתכנסת ל- x . אכן, החל ממוקום מסויים $d(x_n, x) = d(x, x) = 0$ לכן $d(x_n, x) \rightarrow 0$

ב. במטריקה הדיסקרטית המרחקים הם 0 או 1. לכן אם $d(x_n, x) \rightarrow 0$, זה אומר שהחל ממוקום מסויים $d(x_n, x) = 0$. כלומר, $x_n = x$.

3. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.
 פתרון:

נוכיח שהסדרה מתכנסת ל- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

הוכחה: $d_\infty((\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots), (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)) = \sup(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

4. נתבונן במרחב (X, d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, ו d היא המטריקה המושרית מ- \mathbb{R} .

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M, τ) הוא מרחב מטרי ו (Y, τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\} \subseteq Y$ ו $x \in Y$, $x_n \rightarrow x$ לפי τ , אמ"ם $x_n \rightarrow x$ לפי τ_Y .

ב. נסתכל על הסדרה $x_n = \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\} \subseteq X$.

ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X . פתרון:

א. אם $x_n, x \in Y$, אז $\tau(x_n, x) = \tau_Y(x_n, x)$, מהגדרת המטריקה המושרית. לכן $\tau_Y(x_n, x) \rightarrow 0 \iff \tau(x_n, x) \rightarrow 0$.

ב. נניח בשלילה שקיים n כך ש $\frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. כלומר, קיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש

$$\sqrt{2} = \frac{bn - an}{b + a} \iff (b + a)\sqrt{2} = bn - an \iff bn + b\sqrt{2} = a \quad \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}} = \frac{a}{b}$$

אז $an - a\sqrt{2} \iff b(n + \sqrt{2}) = a(n - \sqrt{2})$. כלומר, $\sqrt{2}$ רציונלי, וזאת כמובן סתירה.

ג. נניח ש $x_n \rightarrow x$ ב X . אז $x_n \rightarrow x$ גם ב \mathbb{R} . אבל ידוע ש $x_n \rightarrow 1$ ב \mathbb{R} . ו $x \neq 1$, כי $X \neq 1$. בסתירה ליחידות הגבול במרחב מטרי.

5. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.

$$d(x, y) = \begin{cases} \sqrt{3} - \frac{n}{2n+5} & | n \in \mathbb{N} \\ |x - y| & \end{cases} \rightarrow \mathbb{Q} \cap (2016, \infty)$$

פתרון. קיים. למשל נגדיר פונקציה לפי

$$f(x) = \sqrt{3} - x + 2016$$

ואז אכן

$$f(\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5}) = \frac{n}{2n+5} + 2016 \in \mathbb{Q} \cap (2016, \infty)$$

בנוסף זה שיכון איזומטרי מפני ש

$$\begin{aligned} |f(\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5}) - f(\sqrt{3} - \frac{m}{2m+5})| &= |\frac{n}{2n+5} + 2016 - (\frac{m}{2m+5} + 2016)| \\ &= |\frac{n}{2n+5} - \frac{m}{2m+5}| \\ &= |\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5} - (\sqrt{3} - \frac{m}{2m+5})| \end{aligned}$$

$$(b) (\mathbb{Z}, d_5) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_7)$$

פתרון. לא קיים. נניח בשלילה שקיים שיכון איזומטרי f .

$$d_5(5, 0) = \frac{1}{5}$$

ולכן

$$d_5(f(5), f(0)) = \frac{1}{5}$$

אבל ב (\mathbb{Z}, d_7) אין אף זוג נקודות שהמרחק ביניהם הוא $\frac{1}{5}$ (מרחקים הם 0 או $\frac{1}{7^k}$). סתירה.

6. יהי (X, d) מרחב מטרי.

(א) הוכיחו כי לכל $x \in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X .

פתרון. נוכיח כי המשלים קבוצה פתוחה. יהי $y \neq x$ צריך להוכיח שיש $r > 0$ כך ש $x \notin B(y, r)$. אז אפשר לקחת $r = \frac{d(x,y)}{2}$.

(ב) תנו דוגמא נגדית לסעיף א' אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

פתרון. אפשר לקחת פשוט את הפסאודו מטריקה $d(a, b) = 0$ לכל $a, b \in X$ ואז x יהיה מוכל בכל כדור פתוח ולכן בכל קבוצה פתוחה. ולכן המשלים של $\{x\}$ היא לא קבוצה פתוחה (הערה: במרחב הזה הקבוצות הסגורות/הפתוחות היחידות הן (\emptyset, X))

(ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

פתרון. מייד כי כל נקודה היא קבוצה סגורה ואיחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות היא גם קבוצה סגורה.

7. הוכיחו שבמרחב (\mathbb{Z}, d_p) כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0, r)$ הוא קבוצה סגורה ותת חבורה.

פתרון. ברור שזו קבוצה פתוחה (כל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה). נוכיח שזו גם קבוצה סגורה. אם $r \geq 1$ אז הכדור הזה הוא כל \mathbb{Z} וזו בוודאי קבוצה סגורה ותת חבורה. אחרת קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\frac{1}{p^{m+1}} \leq r < \frac{1}{p^m}$$

נבחר t כך ש

$$r < t < \frac{1}{p^m}$$

ואז קל לבדוק ש

$$B(0, r) = B[0, t]$$

(כי אין 2 נקודות שהמרחק שלהן ממש בין $\frac{1}{p^m}$ ו $\frac{1}{p^{m+1}}$ - אם המרחק של x מ 0 קטן שווה t הוא יהיה קטן שווה $\frac{1}{p^{m+1}}$ ולכן קטן מ r) ולכן $B(0, r)$ גם קבוצה סגורה כי זה גם כדור סגור.

נותר להוכיח שזו תת חבורה. אבל אם $x, y \in B(0, r)$ זה אומר ש

$$\frac{1}{p^{k(0,x)}} < r, \quad \frac{1}{p^{k(0,y)}} < r$$

כאשר כזכור $k(a, b)$ היא החזקה הגבוה ביותר α שעבורה $a - b$ p^α | עכשיו נשים לב ש

$$k(0, x + y) \geq \min\{k(0, x), k(0, y)\}$$

כי אם x p^α | y ו p^α | $x + y$ ולכן

$$\frac{1}{p^{k(0,x+y)}} < r$$

כלומר

$$x + y \in B(0, r)$$

כנדרש.

8. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל \mathbb{R} . המטריקה היא $d(a_n, b_n) = \frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

(א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הבאה היא קבוצה פתוחה:
 $\{\vec{x} = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle \mid [\langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle] \vee [x_0 = 6]\}$

פתרון. נשים לב שקבוצת הסדרות המתחילות ב $0, 1, 2$ היא הכדור הפתוח שמרכזו ב $0, 1, 2, 0, 0, 0, \dots$ ורדיוסו $\frac{1}{3}$ כי ההבדל בין הסדרות יכול להתחיל באיבר הרביעי ולכן המרחק הוא לכל היותר $\frac{1}{4}$.
 בדומה הסדרות שמתחילות ב 6 זהו כדור פתוח עם רדיוס 1. איחודן הוא עדיין פתוח.

הערה: למעשה קל לבדוק שזוהי קבוצה סגורה.

(ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.

פתרון. נוכיח שמשילמתה פתוחה. תהי a_n סדרה לא קבועה. כלומר קיימים $a_i \neq a_j$ בלי הגבלת כלליות $i < j$. אז קבוצת כל הסדרות שמתחילות ב

$$a_1, \dots, a_j$$

היא כדור פתוח (כמו בסעיף הקודם). וכדור זה כמובן לא מכיל אף סדרה קבועה. זה מה שרצינו.

9. הוכיחו/הפריכו: אם $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל, אז (\mathbb{R}, d_f) הוא מרחב שלם, כאשר $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$
 הוכחה:

$\{x_n\}$ סדרת קושי אמ"ם $0 \rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| = d(x_n, x_m) \rightarrow 0$
 כלומר, הסדרה $\{f(x_n)\}$ היא סדרת קושי במטריקה הרגילה של \mathbb{R} . לכן יש לה גבול. $f(x_n) \rightarrow a$. מכיון ש f חח"ע ועל יש לא מקור יחיד x . נקבל ש: $d(x_n, x) = |f(x_n) - a| \rightarrow 0$ ולכן $x_n \rightarrow x$. כלומר, הסדרה מתכנסת.

10. הוכיחו/ הפריכו: המרחבים הבאים שלמים:

(א) מרחב כל הסדרות הממשיות המתאפסות לבסוף, עם מטריקת הסופרימום. הפרכה:

$$(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0.0.0\dots)$$

נסתכל על הסדרה: (שימו לב, זוהי סדרה של סדרות. לכל n מקבלים איבר אחר בסדרה, שהוא בפני עצמו סדרה מתאפסת לבסוף)

נטען שמרחב כל הסדרות החסומות, הסדרה הזאת מתכנסת לאיבר: $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

כלומר, x שווה לסדרה הממשית $(\frac{1}{i})$

$$d(x_n, x) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

הוכחת הטענה: הוכחנו שהסדרה הנ"ל מתכנסת במרחב יותר גדול, ולכן היא סדרת קושי, אבל היא לא מתכנסת במרחב שלנו, כי הגבול שלה לא שייך למרחב (הוא לא מתאפס לבסוף).

כלומר, מצאנו סדרת קושי לא מתכנסת.

(ב) \mathbb{R}^N עם המטריקה: $d((x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N)) = \max_i |x_i - y_i|$ הוכחה: תהא $\{x^n\}$ סדרת קושי. יהא $0 < \epsilon$ נתון. בגלל שזוהי סדרת קושי קיים n_0 כך ש

$$\forall n, m \geq n_0 : d_{\max}(x^n, x^m) \leq \epsilon$$

ולכן בכל קורדינאטה i מתקיים

$$\forall n, m \geq n_0 : |x_i^n - x_i^m| \leq \max_k |x_k^n - x_k^m| = d_{\max}(x^n, x^m) \leq \epsilon$$

ולכן בכל קורדינאטה נקבל סדרת קושי $\{x_i^n\}_n$ ב \mathbb{R} ולכן קיים הגבול $\lim_n x_i^n = a_i$. נגדיר $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ ונראה שזה הגבול של הסדרה שלנו. לכל i קיים $n_{0,i}$ כך ש

$$\forall n \geq n_{0,i} : |x_i^n - a_i| \leq \epsilon$$

ולכן עבור $N_0 = \max_i \{n_{0,i}\}$ נקבל כי

$$\forall n \geq N_0 : d_{\max}(x^n, a) = \max_k |x_k^n - a_k| \leq \epsilon$$

וקיבלנו כי $x^n \xrightarrow{d_{\max}} a$