

## תרגיל בית 1 באלגברה מתקדמת 83-804 סמסטר א' תשע"ט

**שאלה 1.** ענו עבור כל מערכת אלגברית על השאלות הבאות:  
 האם היא אגודה?  
 האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?  
 האם היא חבורה?  
 האם הפעולה היא חילופית?

א.  $(\mathbb{N}, \max)$ , המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ב.  $(\mathbb{N}, *)$ , המספרים הטבעיים עם הפעולה  $a * b = a + b + 2$ .

ג. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ד.  $(A, \cdot)$ , הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ה.  $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$ , המספרים הרציונלים בלי  $-1$  עם הפעולה  $a * b = a + b + ab$ .

**שאלה 2.** הוכיחו שהמערכת הבאה מקיימת את כל האקסיומות של חבורה אבלית פרט לקיבוציות (אסוציאטיביות):  $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \cdot)$  המורכבת מהמספרים הרציונליים יחד עם איבר חדש שמסומן  $\infty$  והפעולה מוגדרת לפי  $\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$  לכל  $x \neq 0$ ,  $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1$  ואחרת זהו כפל רגיל של מספרים רציונליים.

רשות: מצאו מערכת אחרת שמקיימת את כל האקסיומות של חבורה פרט לקיבוציות.

**שאלה 3.** תהי  $S = \{a, b, c\}$  קבוצה בת שלושה איברים. הגדירו פעולה  $\Delta$  בעזרת לוח כפל כך שהמערכת  $(S, \Delta)$  היא חבורה. האם החבורה המתקבלת אבלית?

**שאלה 4.** תהינה  $(G, *)$  ו- $(H, \bullet)$  חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית  $G \times H$  פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

לכל  $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$

א. הוכיחו כי  $G \times H$  עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של  $G$  ו- $H$ .

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה  $G \times H$  אבלית אם ורק אם  $G$  ו- $H$  אבליות.

**שאלה 5.** תהי  $G$  חבורה. הוכיחו כי  $G$  אבלית אם ורק אם לכל  $a, b \in G$  מתקיים כי  $(ab)^2 = a^2 b^2$ .

בהצלחה!