תרגיל בית 2 באלגברה מתקדמת
83-804 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$. הוכיחו כי $m\mathbb{Z}\leq n\mathbb{Z}$ אם ורק אם $n|m$.

שאלה 2. תהי קבוצה $S=\{a,b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S,*)$ היא:

א. אגודה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

שאלה 3. בכל סעיף, קבעו האם תת־הקבוצה הנתונה היא תת־חבורה:

א. $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ (עם חיבור רגיל).

ב. $8\mathbb{Z}_{12}=\{8k\,|\,k\in\mathbb{Z}_{12}\}\subseteq\mathbb{Z}_{12}$.

ג. $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{Z}_p\right\}\subseteq GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$. תזכורת: $GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות בגודל 3×3 מעל השדה $\mathbb{Z}_p$, עם הפעולה של כפל מטריצות.

ד. $\{A\in M_n(\mathbb{Q})\,|\,\det A=0\}\subseteq M_n(\mathbb{Q})$.

ה. $O_n(\mathbb{R})=\left\{A\in GL_n(\mathbb{R})\,\middle|\,A^T=A^{-1}\right\}\subseteq GL_n(\mathbb{R})$ המטריצות האורתוגונליות.

ו. $\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\ \text{הפיכה}\}\subseteq\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\left(1\right)>0,\ f\ \text{הפיכה}\}$.

ז. $\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\ \text{הפיכה}\}\subseteq\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,f\left(1\right)=1,\ f\ \text{הפיכה}\}$.

(בשני הסעיפים האחרונים הפעולה היא הרכבת פונקציות).

שאלה 4. תהי G חבורה, ויהיו $H,K\leq G$ תת־חבורות של G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H\cap K$ היא תת־חבורה של G.

ב. $H\cup K$ היא תת־חבורה של G.

ג. $\Delta_H=\{(h,h)\,|\,h\in H\}$ היא תת־חבורה של $G\times G$.

שאלה 5. תהי G חבורה, ויהיו $a,b\in G$.

א. הפריכו שאם $o\left(a\right),o\left(b\right)<\infty$, אזי $o\left(ab\right)<\infty$ או $o\left(ab\right)=o\left(a\right)o\left(b\right)$.

ב. הוכיחו $o\left(ab\right)=o\left(ba\right)$ (גם אם הסדר אינסופי). רמז: חשבו את $(ba)^{o(ab)}$.

שאלה 6 (חזרה)**.** תהי S אגודה ו-$a \in S$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1 = a$, ולכל $n > 1$ נגדיר $a^{n+1} = a^n \cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

א. $a^n a^m = a^{n+m}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ב. $(a^n)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ג. נניח כי S היא חבורה עם איבר יחידה e ונרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 = e$ ו-$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$. הוכיחו כי $(a_1 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_1^{-1}$ לכל $a_1, \dots, a_k \in S$. הסיקו כי $(a^n)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

שאלה 7 (רשות)**.** מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

בהצלחה!