הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגול 11

צימודים

הגדרה:

צימוד של שתי מידות הסתברות μ,ν על מרחב $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ הוא זוג משתנים מקריים (X,Y) כך ש- $X\sim\mu$ ו- $Y\sim\nu$.

$$P(X\in A)=\mu(A)$$

$X\sim\mu$: משתנה מקרי X מגדיר מידה $\mathcal{L}_X(A)=P(X\in A)$.

$X\sim\mu \iff \mathcal{L}_X=\mu$.

דוגמה:

שני מטבעות $X\sim Ber(p)$, $Y\sim Ber(q)$, $p<q$.

אפשר להגדיר שני צימודים "טבעיים":

- צימוד מונוטוני: נגריל $U\sim U[0,1]$

$$X=\mathbb{1}_{\{U\le p\}}, \qquad Y=\mathbb{1}_{\{U\le q\}}$$

$P((X,Y)=(0,0))=1-q$
$P((X,Y)=(0,1))=q-p$
$P((X,Y)=(1,0))=0$
$P((X,Y)=(1,1))=p$

במקרה הזה $X\le Y$.

דרך אחרת להגדיר צימוד כזה: נגריל את Y. אם $Y=0$ ניקח $X=0$. אחרת נגריל את X עם ההסתברות המתאימה.

- צימוד בלתי-תלוי: אפשר לצמד X,Y בת"ל עם ההתפלגויות האלו.

$\Omega=\{0,1\}^2$, $\quad P(a,b)=(1-p)^{1-a}p^a(1-q)^{1-b}q^b$

ואז X,Y ב"ת.

תרגיל:

נגדיר סדרת מ"מ ב"ת
$$X_n=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\\ -1, & \frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\\ n^2, & \frac{1}{n^2}\end{cases}.$$

לכל n, $\mathbb{E}[X_n]=1$. הראו ש- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to\infty]{a.s.}0$.

הוכחה:

נגדיר $Y_n=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}\\ -1, & \frac{1}{2}\end{cases}$ עם צימוד ל- X_n:

נגריל את X_n. אם $X_n\neq n^2$ ניקח $Y_n=X_n$, ואחרת $Y_n=\begin{cases}1, & \frac{1}{2}\\ -1, & \frac{1}{2}\end{cases}$.

נשים לב ש- $P(X_n\neq Y_n)=\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$, ולכן לפי בורל-קנטלי

$$P(X_n\neq Y_n\ \text{i.o.})=0.$$

כלומר לכמעט כל ω, $X_n=Y_n$ פרט אולי למספר סופי של ערכים.

אני רוצה לטעון שכבר אומר שאם $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$ קיים, אז גם $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ קיים ושווה לו (בכמעט תמיד).

אכן, ניקח ω כזה. יהי N האינדקס המקסימלי שעבורו $X_N(\omega)\neq Y_n(\omega)$.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}X_i}_{\text{סופי}}}_{\downarrow\ 0}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n}Y_i}_{=\frac{n-N}{n}\cdot\underbrace{\frac{1}{n-N}\sum_{i=N+1}^{n}Y_i}_{\downarrow\ \text{החוק החזק של המספרים הגדולים}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

<u>הגדרה:</u>

יהיו μ,ν שתי מידות הסתברות על $(\Omega,\mathcal{F})$. מגדירים

$$\|\mu-\nu\|_{TV}=\sup_{A\in\mathcal{F}}|\mu(A)-\nu(A)|=\frac{1}{2}\sum_{x}|\mu(x)-\nu(x)|$$

בעולם בדיד

<u>טענה:</u>

לכל צימוד (X,Y) של μ,ν,

$$\|\mu-\nu\|_{TV}\le P(X\neq Y).$$

בנוסף, קיים <u>צימוד מקסימלי</u> שמשיג את החסם הזה.

<u>דוגמה:</u>

נחזור לדוגמה של $\overset{\mu}{Ber(p)}$, $\overset{\nu}{Ber(q)}$, $q>p$.

$$\|\mu-\nu\|=\frac{1}{2}\left(|\mu(0)-\nu(0)|+|\mu(1)-\nu(1)|\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(|1-p-(1-q)|+|p-q|\right)=\frac{1}{2}(q-p+q-p)=q-p$$

בצימוד הבלתי-תלוי,

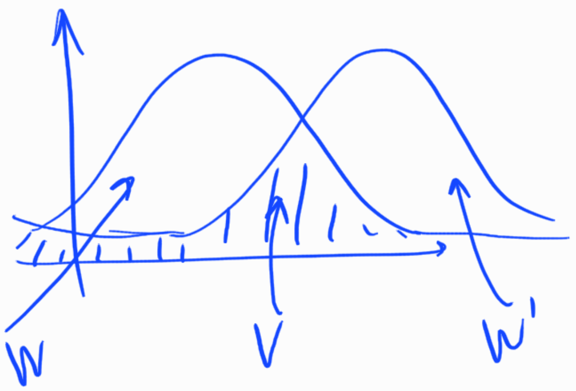
$$P(X\neq Y)=P((X,Y)=(0,1))+P((X,Y)=(1,0))=(1-p)q+p(1-q)=$$
$$=p+q-2pq$$

$$p+\cancel{q}-2pq>\cancel{q}-p\iff 2p>2pq\iff q<1$$

בצימוד המונוטוני,

$$P(X\neq Y)=P((X,Y)=(0,1))=q-p$$

וזה באמת הצימוד המקסימלי.



איך מוצאים את הצימוד המקסימלי?

נתונים ν, μ. נגדיר $r = \min\{\mu, \nu\}$.

$$q = \int r(x)\,dx = 1 - \|\mu - \nu\|_{TV}$$

מגרילים משתנים מקריים:

- $Z \sim Ber(q)$.
- V לפי הצפיפות $\frac{r(x)}{q}$.
- W לפי הצפיפות $\frac{\mu(x) - r(x)}{1-q}$.
- W' לפי הצפיפות $\frac{\nu(x) - r(x)}{1-q}$.

והצימוד הוא

$$X = \begin{cases} V, & z = 1 \\ W, & z = 0 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} V, & Z = 1 \\ W', & Z = 0 \end{cases}$$

תרגיל:

מצאו צימוד מקסימלי של $Exp(1)$ ו- $Exp(2)$.

$$f_{Exp(\lambda)}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

פתרון:

$X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$.

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

$$f_Y(y) = 2e^{-2y}, \quad y > 0$$

$$f_X(t) > f_Y(t) \iff e^{-t} > 2e^{-2t} \iff e^t > 2 \iff t > \log 2$$

לפי עזר

$$r(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\le \log 2 \\ 2e^{-2t}, & t>\log 2 \end{cases}$$

$$q=\int_0^\infty r(t)\,dt=\int_0^{\log 2} e^{-t}dt+\int_{\log 2}^{\infty} 2e^{-2t}dt=$$

$$=\left(-e^{-t}\right|_0^{\log 2}+\left(-e^{-2t}\right|_{\log 2}^{\infty}=\left(-e^{-\log 2}+1\right)+\left(0+e^{-2\log 2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+1+0+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

במקרה ה- $TV=\frac{1}{4}$. לפי המתכון:

- $Z\sim Ber(\frac{3}{4})$.
- V עם צפיפות $\frac{4}{3}\cdot\min\{e^{-t},2e^{-2t}\}$.
- W עם צפיפות $4\cdot(e^{-t}-2e^{-2t})$ אם $t\ge\log 2$.
- W' עם צפיפות $4\cdot(2e^{-2t}-e^{-t})$ אם $0<t<\log 2$.

$$X=\begin{cases} V, & Z=1 \\ W, & Z=0 \end{cases} \qquad Y=\begin{cases} V, & Z=1 \\ W', & Z=0 \end{cases}$$

נראה ש- X אכן יוצא אקספוננציאלית:

$$F_X(a)=P(X\le a)=P(X\le a|Z=0)\cdot P(Z=0)+P(X\le a|Z=1)\cdot P(Z=1)=$$

$$=P(W\le a)\cdot\frac{1}{4}+P(V\le a)\cdot\frac{3}{4}$$

אם $a<\log 2$,

$$F_X(a)=\frac{1}{4}\cdot 0+\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\int_0^a \cancel{\frac{4}{3}}\cdot e^{-t}dt=1-e^{-a}$$

אם $a\ge\log 2$,

$$F_X(a)=\cancel{\frac{1}{4}}\int_{\log 2}^{a}\cancel{4}\cdot(e^{-t}-\cancel{2e^{-2t}})dt+\cancel{\frac{3}{4}}\cancel{\frac{4}{3}}\left(\int_0^{\log 2}e^{-t}dt+\cancel{\int_{\log 2}^{a}2e^{-2t}dt}\right)=1-e^{-a}$$