פיתרון מבחן 2008 מועד א

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן.

1) הוכח כי $p<q$ ראשוניים ו $q \not\equiv 1 (\bmod p)$ אזי כל חבורה מסדר pq היא ציקלית.

פיתרון:

מכיוון ש$r_p \mid pq$ וגם $r_p \equiv 1\,(\bmod p)$ (וגם $q \not\equiv 1 (\bmod p)$) אנו מקבלים $r_p = 1$. משמע ישנה תת-חבורה p-סילו אחת A והיא נורמלית. הגודל שלה צריך לחלק את pq ולכן היא מגודל p.

מכיוון ש$r_q \mid pq$ וגם $r_q \equiv 1\,(\bmod q)$ (וגם $q>p>1$) אנו מקבלים $r_q = 1$. משמע ישנה תת-חבורה q-סילו אחת B והיא נורמלית. הגודל שלה צריך לחלק את pq ולכן היא מגודל q.

החיתוך של שתיהן הוא $\{e\}$ (כי כל שאר האיברים בA הם מסדר p ובB הם מסדר q), ולכן המכלפה שלהן AB איזומורפית ל$A \times B \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. מצד שני, $AB = G$ בגלל ש$p \mid AB$ וגם $q \mid AB$ ולכן $|G| = pq \mid AB$.

משמע $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. בפרט $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ היא ציקלית (נוצרת ע"י $(1,1)$).

2) ראה תרגיל 2 מבחן 2007 מועד א.

3) תהי G חבורה סופית הפועלת על קבוצה X. הוכח כי הסדר של מסלול של כל איבר ב X מחלק את הגודל של G.

פיתרון:

יהי $x \in X$. המסלול שלו הוא $\theta = \theta(x) = \{gx : g \in G\}$. המייצב שלו הוא $S = St(x) = \{g \in G : gx = x\}$. המייצב מהווה תת-חבורה של G.

נבנה פונציה בין המחלקות השמאליות של S לבין המסלול:

$\varphi:\{gS : g\in G\}\to\theta$ המקיימת $\varphi(gS)=gx$.

פונקצייה זו היא מוגדרת היטב וחח"ע משום

ש $aS=bS \Leftrightarrow a^{-1}bS=S \Leftrightarrow a^{-1}b\in S \Leftrightarrow a^{-1}bx=x \Leftrightarrow bx=ax$.

לכל gx יש מקור והוא gS, ולכן זו גם פונקצייה על.

לכן מספר האיברים במסלול שווה לאינדקס $[G:S]$ ולכן הוא מחלק את הגודל של G.

4) נניח שקיים איזומורפיזם בין S_5 ל G. מה יכולה להיות G (עד כדי איזומורפיזם)?

פיתרון:

ישנו משפט האומר כי תת-החבורות הנורמליות של S_5 הן S_5, A_5 ו $\{id\}$.

[הוכחה: תהי תת-חבורה נורמלית $K\lhd S_5$. אם K כוללת חילוף אז היא כוללת את כולם, ומכיוון שהחילופים יוצרים את כל חבורת התמורות אז $K=S_5$.

אם K כוללת מחזור מאורך 3 אז היא כוללת את כל המחזורים מאורך 3, ולכן היא כוללת את A_5. מכיוון ש $[S_5,A_5]=2$, מתקיים $K=S_5$ או $K=A_5$.

אם K כוללת מחזור מאורך 4 אז היא כוללת את כולם. בפרט היא כוללת את $\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\end{pmatrix}$, משמע היא כוללת מחזור מאורך 3, ולכן את כולם, ולכן כוללת את A_5, אך היא כוללת גם תמורות אי-זוגיות (מחזורים מאורך 4) ולכן $K=S_5$.

אם K כוללת מחזור מאורך 5 אז היא כוללת את כולם. בפרט את $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&4&3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}$, משמע היא כוללת מחזור מאורך 3, ולכן $K=S_5$ או $K=A_5$.

אם K כוללת תמורה עם מבנה מחזורים $2,2,1$ אז היא כוללת את כולן. בפרט היא כוללת את $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\end{pmatrix}$.משמע היא כוללת מחזור מאורך 3, ולכן $K=S_5$ או $K=A_5$.

אם K כוללת תמורה עם מבנה מחזורים $3,2$ אז היא כוללת את כולן. בפרט היא כוללת את $\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}\right)^3=\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}$.משמע היא כוללת מחזור מאורך 2, ולכן $K=S_5$.

אם היא לא כוללת אף תמורה מהרשימה שעברנו עליה אז היא לא כוללת שום תמורה פרט לתמורת הזהות, משמע $K=\{id\}$.]

אם קיים אפימורפיזם בין S_5 לG אז $G\cong S_5/K$ לאיזושהי $K\lhd S_5$. לכן האפשרויות הן $G\cong S_5/S_5\cong\{e\}$, $G\cong S_5/A_5\cong\mathbb{Z}_2$ ו$G\cong S_5/\{id\}\cong S_5$.

5) מיין את החבורות מהסדר 9, 38 ו77 עד כדי איזומורפיזם.

פיתרון:

ניעזר במשפט האומר כי כל חבורה מסדר p^2 היא אבלית

[הוכחה: ראה בפיתרון מבחן 2007 מועד א תרגיל 5].

זה אומר שכל חבורה מסדר 9 היא אבלית, ולכן איזומורפית ל$\mathbb{Z}_9$ או $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

עבור 38, ניעזר במשפט האומר כי כל חבורה מסדר $2p$ איזומורפית ל$\mathbb{Z}_{2p}(=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_p)$ או ל$I_2(p)$ (החבורה הדיהדרלית).

במקרה הזה $38=2\cdot 19$, ו19 הוא ראשוני, ולכן כל חבורה מסדר 38 איזומורפית ל$\mathbb{Z}_{38}$ או ל$I_2(19)$.

בקשר ל77, ניעזר במשפט האומר כי אם $p<q$ ראשוניים כך ש $q\not\equiv 1 \pmod p$ אזי כל חבורה מסדר pq היא ציקלית. כעת $7\cdot 11=77$. שני הגורמים הראשוניים מקיימים את התנאי, ולכן כל חבורה מסדר 77 איזומורפית ל $\mathbb{Z}_{77}$.

6) הוכח או הפרך כי כל חבורה מהסדר r היא פתירה כאשר

a. $r=119$.

b. $r=120$.

c. $r=121$.

פיתרון:

$119=7\cdot 17$, [יש משפט האומר כי כל חבורה מסדר pq כאשר שני הגורמים ראשוניים היא פתירה] ולכן כל חבורה מסדר 119 היא פתירה.

ישנה חבורה לא פתירה מסדר 120, למשל S_5. [היא אינה פתירה משום שיש משפט האומר שחבורה פתירה אם ורק אם קיים t טבעי עבורו $G^{(t)}=\{e\}$. אולם לכל t טבעי, $S_5^{(t)}=A_5$]

כל חבורה מסדר p^2 היא אבלית ולכן פתירה. בפרט כל חבורה מסדר 121 היא פתירה.

7) הוכח כי A_4 אינה פשוטה.

הוכחה:

תהי $K=\{id,(1\ \ 2)(3\ \ 4),(1\ \ 3)(2\ \ 4),(1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$.

הצמדת תמורה σ בתמורה π אינה משנה את מבנה המחזורים של σ. כל תמורה ב K פרט לתמורת הזהות היא ממבנה מחזורים $2,2$. כאשר מצמידים

אותה מקבלים תמורה עם מבנה מחזורים $2,2$. אך K כוללת את כל התמורות עם מבנה המחזורים הזה, ולכן K סגורה להצמדה בתמורה מS_4 ובפרט להצמדה בתמורה מA_4. משמע, K נורמלית. ברור כי אינה תת-חבורה טריוויאלית, ולכן A_4 אינה פשוטה.