תורת הקבוצות תרגיל בית 8

1. הוכיחו שהסודר ω^ω הוא קבוצה.
פתרון: נוכיח באינדוקציה את ט1: לכל $n \in \omega$ לכל קבוצה A מתקיים כי $A+\omega^n$ היא קבוצה.
בסיס ט1: עבור $n=0$: תהא A קבוצה אזי $A+\omega^0=A+1$ קבוצה (הוכחנו בתירגול).
צעד ט1: נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$. תהא A קבוצה ונראה כי $A+\omega^{n+1}$ קבוצה. נוכיח זאת בעזרת אינדוקציה נוספת שתתן לנו את ט2 (שימו לב שט2 היא חלק מהוכחת הצעד של ט1): לכל $m \in \omega$ מתקיים כי $A+\omega^n \cdot m$ קבוצה.
בסיס ט2: $m=0$ אכן $A+\omega^n \cdot 0 = A+0$ קבוצה.
צעד ט2: נניח נכונות עבור m כלשהוא ונוכיח שהטענה נכונה עבור $m+1$. אכן

$$A+\omega^n\cdot(m+1)=A+\omega^n\cdot m+\omega^n$$

לפי הנחת האינדוקציה של ט2 $A+\omega^n \cdot m$ קבוצה ולפי הנחת האינדוקציה של ט1 $A+\omega^n \cdot m+\omega^n$ גם קבוצה (פשוט נגדיר $A'=A+\omega^n$). מש"ל ט2 .
כעת לכל $m \in \omega$ נתאים את הקבוצה $\omega^n \cdot m$. מאקסיומת ההחלפה על ω נקבל שהקבוצה $\{\omega^n \cdot m : m \in \omega\}$ היא קבוצה, ולכן האיחוד שלה הוא קבוצה, מאקסיומת האיחוד. האיחוד שלה הוא בדיוק $\bigcup_{m\in\omega}\{\omega^n \cdot m\}=\omega^n\cdot\omega=\omega^{n+1}$. וזה מסיים את הוכחת ט1.
כעת נשתמש בט1 כדי להוכיח את התרגיל: לכל $n \in \omega$ נתאים את הקבוצה ω^n. מאקסיומת ההחלפה על ω נקבל שהקבוצה $\{\omega^n : n \in \omega\}$ היא קבוצה, ולכן האיחוד שלה הוא קבוצה, מאקסיומת האיחוד. האיחוד שלה הוא $\bigcup_{n\in\omega}\{\omega^n\}=\omega^\omega$ ולכן ω^ω קבוצה כדרוש.

2. יהיו A,B קבוצות. הוכיחו ש ${}^AB$ כלומר, אוסף כל הפו' מA לB הוא קבוצה.
פתרון:
נשים לב ש

$${}^AB=\{R : dom(R)=A \wedge (a,b),(a,c)\in R \Rightarrow b=c\}$$

קבוצת כל היחסים החד ערכיים והשלמים מA לB.כלומר,

$$\begin{gathered}{}^AB=\{R\subseteq A\times B : dom(R)=A \wedge (a,b),(a,c)\in R \Rightarrow b=c\}\\ \Downarrow \\ {}^AB=\{R\in P(A\times B) : dom(R)=A \wedge (a,b),(a,c)\in R \Rightarrow b=c\}\end{gathered}$$

אם AוB קבוצות, אז ראינו בתרגול ש $A\times B$ קבוצה. לכן מאקסיומת קבוצת החזקה גם $P(A\times B)$ קבוצה. ואז מהפרדה על $P(A\times B)$ נקבל ש ${}^AB$ קבוצה.

3. תהי $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה של קבוצות.

א. הוכיחו ש$\cap\mathcal{F} = \{x : \forall A \in \mathcal{F}, x \in A\}$ הוא קבוצה.

ב. הסבירו למה צריך לדרוש ש$\mathcal{F}$ לא ריקה.

פתרון:

א. נתון ש$\mathcal{F}$ לא ריקה. נבחר $A \in \mathcal{F}$. אזי: $\cap\mathcal{F} = \{x \in A : \forall B \in \mathcal{F}, x \in B\}$ וזאת קבוצה מאקסיומת ההפרדה על A.

ב. נניח ש$\mathcal{F}$ ריקה. אזי "התנאי" בעצם מתקיים תמיד, לכל x בעולם, כי לא קיים $A \in \mathcal{F}$. נקבל ש$\cap\mathcal{F}$ זה קבוצת כל הx בעולם. שזאת כמובן לא קבוצה.

4. הוכיחו שמחלקת המונים היא לא קבוצה.

פתרון:

דרך א':

נסמן ב $\mathcal{C}$ את מחלקת המונים ונניח בשלילה כי היא קבוצה. אזי גם $\bigcup\mathcal{C}$ קבוצה (לפי אקסיומת האיחוד). אבל $\bigcup\mathcal{C}$ היא מחלקת כל הסודרים שהיא אינה קבוצה. סתירה.

הסבר: מצד אחד, כל מונה הוא סודר, ולכן כל איבר שלו הוא גם סודר. מצד שני, לכל סודר α יש מונה שגדול ממנו: $|\alpha|^+$. כלומר, $\alpha \in |\alpha|^+$ ולכן $\alpha \in \bigcup\mathcal{C}$.

דרך ב: נניח ש$\mathcal{C}$ קבוצה. אז ממשפט הארטוגס יש סודר δ כך שאין פונקציה חח"ע ממנו ל$\mathcal{C}$. אבל הפונקציה $f : \delta \to \mathcal{C}$ שמוגדרת ע"י: $\forall\alpha < \delta, f(\alpha) = \aleph_\alpha$ היא פונקציה חח"ע. סתירה.

.