

## שיעור 10

### ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

תהי  $A$  מטריצה  $n$ -ריבועית מעל שדה הממשיים. מספר ממשי  $\lambda$  נקרא ערך עצמי של  $A$  אם קיים וקטור שונה מאפס  $v \in \mathbb{R}^n$  כך ש:  $Av = \lambda v$ .  
כל וקטור המקיים תנאי זה נקרא וקטור עצמי של  $A$ , השייך לערך עצמי  $\lambda$ .

### דוגמא 1

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  נשים לב ש

מכיוון ש  $Av = 4v$  נקבל ש  $4$  ערך עצמי ו  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  הוא וקטור עצמי של המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  השייך

לערך עצמי  $4$ .

### דוגמא 2

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$
 תהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  נשים לב ש

נשים לב שגם  $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$  הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי  $4$ .

באופן כללי גם  $\begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix}$  הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי  $4$ .

### הערה

אם  $v$  וקטור עצמי של  $A$ , השייך לערך עצמי  $\lambda$  אז גם  $\alpha v$  וקטור עצמי של  $A$  השייך לערך עצמי  $\lambda$ .

$$\text{הסבר: } Av = \lambda v \Rightarrow \alpha(Av) = \alpha(\lambda v) \Rightarrow A(\alpha v) = \lambda(\alpha v)$$

### הערה

אם  $A$  מטריצה הפיכה אז למערכת המשוואות  $Ax = 0$  יש פתרון יחיד והוא פתרון האפס. הסבר: אם  $A$  הפיכה אז קיימת לה מטריצה הופכית ואז נקבל ש

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

$$x = 0 \Leftrightarrow x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$$

### תזכורת

מטריצה ריבועית  $A$  הפיכה אם ורק אם  $|A| \neq 0$ .

### מסקנה

למשוואה  $Ax = 0$  יש פתרון יחיד (שהוא פתרון האפס) אם ורק אם  $|A| \neq 0$ .

### דוגמאות

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad 1. \text{ נתבון במערכת המשוואות}$$

נבדוק האם המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה.

$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 4$   
 פתרון האפס  $x = y = z = 0$ .

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad 2. \text{ נתבונן במערכת המשוואות}$$

נבדוק האם המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה.

$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0$   
 המשוואות יש פתרון נוסף. למשל:  $x = -2; y = 1; z = 3$ .

### מציאת ערך עצמי ווקטור עצמי מתאים

נקצה למצוא ערך עצמי למטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  ז"א יש למצוא וקטור שונה מאפס  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  כך ש

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{ולכן}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהווקטור  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  שונה מאפס נקבל שלמשוואה  $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  יש יותר

מפתרון אחד ואז הדטרמיננטה של המטריצה  $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$  שווה לאפס.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

למערכת המשוואות יש פתרון שהוא לא פתרון האפס כאשר  $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ .

הפולינום  $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$  נקרא הפולינום האופייני.

נפתור את המשוואה הנ"ל ונקבל  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$ .

הערכים העצמיים הם  $\lambda = 4, \lambda = -1$ .

לכל ערך עצמי נמצא את הווקטורים העצמיים המתאימים לו.

נמצא את הווקטורים העצמיים המתאימים לערך עצמי  $\lambda = 4$ .

נציב  $\lambda = 4$  במערכת המשוואות ונקבל 
$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3v_1 - 2v_2 = 0 \\ -3v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_1+R_2 \rightarrow R_2} \begin{cases} 3v_1 - 2v_2 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 = 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} 3v_1 - 2v_2 = 0 \\ -3v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא  $v_2$ , נציב  $v_2 = 3$  ונקבל את הפתרון  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  וכל ווקטור מהצורה  $\begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix}$  הוא

פתרון של המשוואה. סה"כ קיבלנו שהקבוצה  $\left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  היא קבוצת כל הווקטורים העצמיים

שמתאימים לערך עצמי  $\lambda = 4$ .

נציב  $\lambda = -1$  במערכת המשוואות ונקבל 
$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2v_1 - 2v_2 = 0 \\ -3v_1 - 3v_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_1-R_2 \rightarrow R_2} \begin{cases} -2v_1 - 2v_2 = 0 \\ 0v_1 + 0v_2 = 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} -2v_1 - 2v_2 = 0 \\ -3v_1 - 3v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא  $v_2$ , נציב  $v_2 = 1$  ונקבל את הפתרון  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  וכל ווקטור מהצורה  $\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$  הוא

פתרון של המשוואה. סה"כ קיבלנו שהקבוצה  $\left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  היא קבוצת כל הווקטורים העצמיים

שמתאימים לערך עצמי  $\lambda = -1$ .

### סיכום

כדי למצוא ערך עצמי כלומר סקלר  $\lambda$  שעבורו  $Av = \lambda v$  יש לחשב את  $|\lambda I - A|$  ולקבל את הפולינום האופייני  $p(\lambda)$ . לפתור את המשוואה  $p(\lambda) = 0$  ולקבל את הערכים העצמיים.

להציב כל אחד מהפתרונות שקיבלת במערכת המשוואות  $Av = \lambda v$ .

קבוצת הפתרון של המערכת הנ"ל נותן את כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי שהצבת.

### תרגיל

מצא את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

### פתרון

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

הפולינום האופייני הוא  $(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

הערכים העצמיים הם  $\lambda = 2, \lambda = 3$ .

עבור  $\lambda = 2$  נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים (הקבוצה הנ"ל נקראת המרחב העצמי)

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{עבור } \lambda = 3 \text{ נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים } \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

### הגדרה

מטריצה  $B$  דומה למטריצה  $A$  אם קיימת מטריצה לא סינגולארית  $P$  כך ש  $B = P^{-1}AP$ .

### דוגמא לשימוש

$$B^n = \overbrace{(P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}AP) \cdot \dots \cdot (P^{-1}AP)}^{n\text{-times}} = P^{-1}A^nP$$

נשים לב ש  $B^n = P^{-1}A^nP$

### הגדרה

נאמר שמטריצה ריבועית  $A$  לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית  $D$  ז"א קיימת מטריצה לא סינגולארית  $P$  ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש  $D = P^{-1}AP$ .

### הערה

אם  $A$  לכסינה אז ניתן לחשב את  $A^n$  באופן הבא:  
 $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$   
 $D^n$  בקלות ולקבל את  $A^n$ .

### דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ כאשר } A^{10}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \text{ ואז } P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ כאשר } \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} P$$

נשים לב ש  $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} P$

נראה בתרגיל הבא כיצד להראות שמטריצה היא לכסינה ואם היא לכסינה כיצד ניתן לחשב את המטריצה ההפיכה  $P$  והמטריצה האלכסונית  $D$ .

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow A^{10} = P \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & (-2)^{10} \end{pmatrix} P^{-1}$$

### תרגיל

הראה שהמטריצה  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  לכסינה ומצא מטריצה הפיכה  $P$  ומטריצה אלכסונית  $D$  שעבורן מתקיים השוויון  $D = P^{-1}AP$ .

### פתרון

תחילה נמצא את הערכים העצמיים.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$$

הערכים העצמיים הם:  $\lambda = 5, \lambda = -2$ .

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור הערך העצמי  $\lambda = -2$ .

$$\cdot \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ שהוא } \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ של המטריצה}$$

הבסיס של המרחב העצמי המתאים לערך העצמי  $\lambda = 5$  הוא הבסיס למרחב האפס של המטריצה

$$\cdot \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ שהוא } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שני ווקטורי עצמיים בת"ל המטריצה היא 2 ריבועית ומכיוון שמספר הווקטורים העצמיים שהם בת"ל שווה לגודל המטריצה אז המטריצה ניתנת ללכסון. המטריצה האלכסונית  $D$  היא מטריצה

שבאלכסון מופיעים הערכים העצמיים ז"א  $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  והמטריצה  $P$  היא המטריצה שעמודותיה הם

הווקטורים העצמיים כלומר  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי 5 נמצא בעמודה

הראשונה מכיוון שבמטריצה האלכסונית הערך העצמי 5 מופיע בעמודה הראשונה באותו אופן ניתן להבין כיצד הגענו לעמודה השנייה.

### שדה המספרים המרוכבים

נשים לב שלמשוואה  $x^2 = -1$  אין פתרון ממשי. מטרה להרחיב את שדה הממשיים כך שלמשוואה הנ"ל יהיה פתרון. נסמן פתרון למשוואה הנ"ל ב  $i$  וקבוצת המספרים המרוכבים היא הקבוצה  $\{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ .

$$\text{לכל } z = a + bi \in \mathbb{C} \text{ נגדיר: } \bar{z} = a - bi, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \operatorname{Re}(z) = a, \operatorname{Im}(z) = b$$

### תרגיל

נתונים הביטויים:  $(5 + 2i) + (2 - 3i), (5 + 2i) - (2 - 3i), (5 + 2i) \cdot (2 - 3i), (5 + 2i) \cdot (2 - 3i)^{-1}$   
עבור על אחד מהביטויים הנתונים:

א. חשב את הביטוי (כלומר הצג אותו בצורה  $z = a + bi$ ).

ב. ציין מהם  $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), \bar{z}, |z|$ .

### פתרון

א.

$$\begin{aligned}(5 + 2i) + (2 - 3i) &= 7 - i \\(5 + 2i) - (2 - 3i) &= 3 + 5i \\(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) &= 16 - 11i\end{aligned}$$

כדי לחשב את  $\frac{5 + 2i}{2 - 3i}$  נכפול את הביטוי ב  $\frac{2 + 3i}{2 + 3i}$  כאשר  $2 + 3i$  הוא המספר הצמוד של  $2 - 3i$ .

$$\frac{5 + 2i}{2 - 3i} = \frac{5 + 2i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{4 + 19i}{-5} = -\frac{4}{5} - \frac{19}{5}i$$

ב. נראה רק עבור הביטוי הראשון  $z = 7 - i$ .

$$|z| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}, \bar{z} = 7 + i, \operatorname{Re}(z) = 7, \operatorname{Im}(z) = -1$$

### תכונות המספרים המרוכבים

א.  $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)$

ב.  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

ג.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ד.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

ה.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

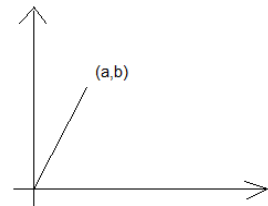
ו.  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

ז. אי שיויון המשולש:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ח. זהות המקבילית:  $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2 \cdot (|z_1|^2 + |z_2|^2)$

### קואורדינטות קוטביות

נרשום כל נקודה במישור באמצעות המרחק מהראשית והזווית שהקטע המחבר את הנקודה עם ראשית הצירים יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה  $x$ .



נסמן את המרחק מהראשית ב  $r$  ואת הזווית ב  $\theta$ . נקבל ש

$$a = r \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{a}{r}$$

$$b = r \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{b}{r}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

בצורה כזאת על מספר מרוכב  $z = a + bi$  ניתן להציג באופן הבא:

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

### דוגמא

נרשום את המספר  $z = \sqrt{3} - 3i$  ז"א יש להציג את הנקודה  $(\sqrt{3}, -3)$  בעזרת רדיוס וזווית.

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12}$$

$$\theta = -60^\circ + 180^\circ k \text{ ולכן } \tan \theta = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

נשים לב שהנקודה נמצאת הרביע הרביעי ולכן  $\theta = 330^\circ$ .

$$z = \sqrt{12} (\cos(330^\circ) + i \sin(330^\circ))$$

### משפט דמואבר

$$(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

### תרגיל 1

$$\text{חשבו את } (1 + \sqrt{3}i)^7$$

### פתרון

נעבור לקואורדינטות קוטביות כדי להשתמש במשפט דמואבר.

$$\theta = 60^\circ + 180^\circ k \leftarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

הראשון נקבל ש  $\theta = 60^\circ$ .

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^7 = 2^7 (\cos(7 \cdot 60^\circ) + i \sin(7 \cdot 60^\circ)) = 128 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

### תרגיל 2

$$z^5 = 1$$

### פתרון

נשים לב ש  $1 = \cos 360^\circ k + i \sin 360^\circ k$  כאשר  $k$  מספר שלם.

$$z_k = \cos 72^\circ k + i \sin 72^\circ k \leftarrow z^5 = \cos 360^\circ k + i \sin 360^\circ k$$

סה"כ נקבל חמישה פתרונות למשוואה.

### מספרים מרוכבים – תרגול נוסף

### תרגיל 1

$$A = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

א. הראה ש  $A$  הוא מספר ממשי טהור לכל  $n$  טבעי.

ב. נתון:  $k$  מספר טבעי,  $n = 3k$ . הוכח:  $A = 2$ .

### פתרון

$$A = z^n + \bar{z}^n = z^n + \overline{z^n} \text{ ואז } z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ נסמן } \bar{z}^n = \overline{z^n}$$

א. נשים לב ש  $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ . נסמן  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ואז  $A = z^n + \bar{z}^n = z^n + \overline{z^n}$  ומכיון שמספר

מרוכב ועוד הצמוד שלו נותן מספר ממשי נקבל ש  $A$  מספר ממשי.

ב. נחשב את  $z^3$ .

$$z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$$

ואז  $z^{3k} = (z^3)^k = 1^k = 1$  ומכיון ש  $\bar{z}^n = \overline{z^n}$  נקבל גם ש  $\bar{z}^{-3k} = 1$  ואז  $A = 2$ .

## תרגיל 2

נתון:  $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

א. מצא את כל פתרונות המשוואה  $z^3 = w^3$ . (הבע כל פתרון בצורה של  $a + bi$ ).

ב. הראה שמכפלת הפתרונות של המשוואה הוא  $w^3$ .

ג. נסמן:  $w^3 = B$ ,  $\bar{w} = A$ . C נקודה על מעגל היחידה (C שונה מ-A, B). חשב את הזווית ACB.

## פתרון

א. נחשב תחילה את  $w^3$ :

$$w^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = i \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

כעת נפתור את המשוואה:

$$z^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z^3 = \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ$$

$$z_k = \cos(45^\circ + 120^\circ k) + i \sin(45^\circ + 120^\circ k)$$

$$z_0 = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$$

$$z_1 = \cos 165^\circ + i \sin 165^\circ$$

$$z_2 = \cos 285^\circ + i \sin 285^\circ$$

ב. נשתמש בנוסחה

$$z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1, z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

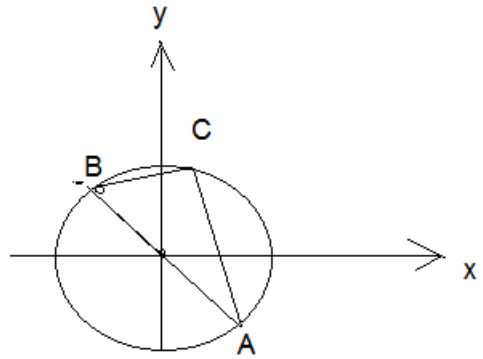
$$z_1 \cdot z_2 = (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_0 \cdot z_1 \cdot z_2 = (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \cdot (\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ) \cdot (\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ) =$$

$$= \cos 495^\circ + i \sin 495^\circ = \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = w^3$$

ג.





AB קוטר במעגל היחידה וזווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

### סדרה הנדסית

אם נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא  $a_1$  ומנתה  $q$  אז  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

### תרגיל 3

נתונה הסדרה הנדסית  $2+i, 1+3i, \dots$  חשב את סכום שלושה עשר האיברים הראשונים.

### פתרון

נחשב תחילה את מנת הסדרה.

$$q = \frac{1+3i}{2+i} \Rightarrow q = \frac{(1+3i) \cdot (2-i)}{(2+i) \cdot (2-i)} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

נחשב את  $q^{13}$ .

$$q^{13} = (q^2)^6 \cdot q = ((1+i)^2)^6 \cdot (1+i) = (2i)^6 \cdot (1+i) = -64 - 64i$$

$$S_{13} = \frac{(2+i)(1+64+64i)}{-i} = \frac{66+193i}{-i} = -193+66i$$