מיכאל קוזרוביץ
michako@walla.com
יום א',

משוואות דיפרנציאליות רגילות – מבוא ופתרון מד"ר מסדר 1

מושגים בסיסיים ומיון:

(1) • משוואה דיפרנציאלית – משוואה המקשרת בין פונק' נעלמת לבין נגזרותיה: $x(t), y(x), y(t)$

משתנה בלתי תלוי / משתנה תלוי

• אם הפונקציה הנעלמת תלויה במשתנה בלתי תלוי אחד, המשוואה היא מד"ר.

• אם הפונקציה הנעלמת תלויה ביותר ממשתנה אחד, והנגזרות הן חלקיות, זו היא מד"ח.

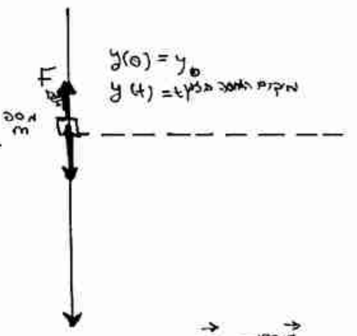
(2) • סדר המשוואה – סדר הנגזרת הגבוהה ביותר של הנעלם המופיע במשוואה.

V_0 – מהירות התחלתית

$V(t)=y'(t)=\frac{dy}{dt}$: מהירות

$F_{תנ}=kV^2$ (פרופורציוני ל-V^2)

$g\approx 9.8\frac{m}{s^2}$



דוגמא למד"ר:

$$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\Sigma\vec{F}=mg-kV^2(t)=mg-k[y'(t)]^2$$

$$a=V'(t)=y''(t)\Rightarrow mg-k[y'(t)]^2=my''(t)$$

← זוהי דוגמא למד"ר

(3) • מד"ר לינארית – אם המשוואה מכילה את הנעלם, ונגזרותיו מחזקה ראשונה בלבד, ואין א השפעה אחרת. דוגמאות לאברים לא לינאריים (כאשר $y(x)$ הנעלם): yy', y^2, $\sin(y')$, e^y.

אולם, האברים הבאים כן לינאריים: $(\sin x)\cdot y'$, x^3y, וכו'..

• צורה כללית של מד"ר לינארית מסדר $n\geq1$ כלשהו:

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y(x)=g(x),$$

כאשר $a_0(x),\dots,a_{n-1}(x)$, $g(x)$ רציפים בתחום כלשהו הגדר.

דוגמאות: מיין את המשוואות הבאות לפי – משתנים התלויים/בת"ל, רגילות/חלקית, הסדר שלה, לינאריות.

$$(1+y^2)y''+(\sin x)y'+3y=e^x \quad ⊛$$

תלוי: $y(x)$

בת"ל: x

רגילה

סדר 2

לא לינארית ($(1+y^2)y''$ קוואדרטי)

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+t\frac{\partial u}{\partial t}=\sin t \quad ⊛$$

תלויים: $u(x,t)$

בת"ל: x, t

חלקית, סדר 2, לינארית

$$\frac{dx}{dt}+t^2\frac{dy}{dt}=t^3 \quad ⊛$$

בת"ל: t

תלויים: $x(t), y(t)$

רגילה, סדר 1, לינארית (חלק ממערכת משוואות)

המשך מושגים:

(4) מושג הפתרון של מד"ר בקטע מסוים: פונקציה $y(x)$ היא פתרון למד"ר בקטע כלשהו אם מקיימת את:

1. היא גזירה לפחות מספר פעמים כסדר המשוואה

2. אם נציב אותה במשוואה, נקבל זהות לכל x בקטע הנבחר.

<u>דוגמאות</u>: האם הפונק' הבאות הן פתרונות למד"ר המוצגת, בקטע הנתון (או בתחום ההגדרה המקסימלי)?

1. $y(x)=e^{-x}+\frac{x}{3}$, $y^{(4)}+4y^{(3)}+3y=x$

נשים לב ש-y גזירה מכל סדר (ב-$\mathbb{R}$) כסכום של פונקציות שהן הרכבה של אלמנטריות.
לכן, נקבל: $y'(x)=-e^{-x}+\frac{1}{3}$, $y^{(3)}(x)=-e^{-x}$,
$y^{(2)}(x)=e^{-x}$. $y^{(4)}(x)=e^{-x}$

נציב במשוואה, ונקבל: $e^{-x}+4(-e^{-x})+3(e^{-x}+\frac{x}{3})=x$

לכן, $y(x)$ פתרון למד"ר ב-$\mathbb{R}$. ✓ $\xleftarrow[x\in\mathbb{R}]{\text{נכון לכל}}$ $\Rightarrow x=x$

2. $y(x)=e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)+e^{x^2}$, $y'-2xy=1$.

האינטגרל קיים לכל x, אבל לא ניתן לחשב אותו בעזרת פונקציות אלמנטריות:
$y(x)$ גזירה ב-$\mathbb{R}$ עם סדר, כי e^{x^2} גזירה כהרכבה של גזירות,
ו-e^{-t^2} רציפה ב-$\mathbb{R}$, (כהרכבה של רציפות) ולכן האינטגרל <u>הבלתי מסוים</u>
שלה גזיר (כפונקציה של x) ומקיים (לפי המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי)

$(*)\quad e^{-x^2}=\int_0^x e^{-t^2}dt$

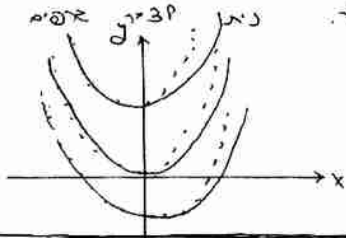
$y'(x)=2xe^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)+\underbrace{e^{x^2}e^{-x^2}}_{(*)\text{ לפי}}+2xe^{x^2}$. נציב במד"ר ונקבל:

$1=y'-2xy=2xe^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)+1+2xe^{x^2}-2x\left[e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}\right]=1$

$1=1$ כדרוש ✓.

<u>סוגי פתרון למד"ר</u>

נתבונן במד"ר הפשוטה – $y'(x)=x$. נבצע אינטגרציה כדי לקבל: $y(x)=\frac{x^2}{2}+c$, $c\in\mathbb{R}$.
קבלנו <u>אוסף אינסופי</u> של פתרונות למשוואה על $\mathbb{R}$ כולו. אוסף אינסופי כזה נקרא
<u>הפתרון הכללי</u> של המד"ר. ניתן לצייר גרפים כדי לקבל עקומות אינטגרליות הנקראות
גם בשם (<u>הצגה גרפית</u>):



עקומות אינטגרליות של אותה
משוואה הנבדלות <u>בתוספת</u>
<u>קבוע</u> (+c) לא נחתכות.

$\boxed{\text{כל פתרון שאינו חלק מהאוסף הכללי נקרא פתרון מיוחד (סינגולרי)}}$

<u>פתרון שיטתי של מד"ר מסדר ראשון – נלמד בהמשך את משפט קיום ויחידות לבעיית התחלה</u>

[<u>משוואה פרידה</u> – ניתנת להפרדת משתנים]

<u>צורה כללית של מד"ר מסדר ראשון</u>:

$$\text{שקול}\begin{cases} M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \\ M(x,y)+N(x,y)y'=0\end{cases}$$

$N(x,y)\neq 0 \xrightarrow{\text{רק אם}} y'=-\frac{M}{N}(x,y)$ בתחום שלנו

מד"ר כזו נקראת <u>פרידה</u> (או ניתנת להפרדה) אם ניתן להציג אותה כך:
$M(x)dx+M(y)dy=0$, ומכאן נבצע אינטגרציה בשני האגפים, כאשר כל אגף <u>לפי משתנה אחד</u>:

$$\boxed{\int M(x)\,dx=-\int N(y)\,dy+C}$$

31.7.11

דוגמאות:

1. לפתור את המשוואה (מצא את כל הפתרונות):

$$x^2y^2y' = y-1$$

נוכל להפריד את שני המשתנים: $\frac{dy}{dx}=y' \Leftarrow x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1$

הפרדה: $\frac{y^2}{y-1}dy=\frac{dx}{x^2} \Leftarrow \int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+c$

התנאים להפרדה: $x\neq0$, $y\not\equiv1$

יכול להיות שנפספס פתרונות, ולכן לא מהותית (גם שתנה תחום ההגדרה)

y פונקציה

x משתנה

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy=\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|$$

$$\Downarrow$$

פתרון כללי למשוואה, בצורה סתומה:

$$\boxed{\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|+\frac{1}{x}=c\ ,\ x\neq0,\ y\not\equiv1}$$

כעת, נבדוק האם $y\equiv1$ מהווה פתרון למשוואה - נציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$x^2y^2y'=y-1 \xRightarrow[y=1\ (y'\equiv0)]{\text{הצבה}} 0=0$$

ולכן זה פתרון סינגולרי. לכל $x\in\mathbb{R}$.

כי זה לא חלק מהפתרון הכללי: עבור $y=1$ ← $\ln 0$ לא מוגדר!

<u>תשובה סופית:</u> $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|+\frac{1}{x}=c,\ x\neq0, y\not\equiv1$ פתרון כללי, $y\equiv1$ סינגולרי.

2. האם לבעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} x^2y^2y'=y-1 \\ y(1)=2 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד? מה תחום ההגדרה הגדול ביותר שלו?

אם יש פתרון יחיד, מצאו אותו.

כדי לקבוע אם יש פתרון יחיד לבעיית ההתחלה, נשתמש במשפט הקיום והיחידות לבעיית התחלה משפט 4: (הוא נותן תנאי נוח יותר מההרצאה)

> עבור הבעיה: $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ אם קיים מלבן <u>פתוח</u> D עם צלעות מקבילות לצירים, המכיל את נק' ההתחלה (x_0,y_0) כך שהפונקציות $f(x,y)$ וגם $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפות ב-D, אזי יש קטע I סביב x במלבן זה שעבורו <u>לכל $x\in I$ יש לבעיה פתרון יחיד.</u>

במקרה שלנו ניתן לרשום: $f(x,y)=y'=\frac{y-1}{x^2y^2}$. f היא מנה של פולינומים במשתנים x,y ולכן רציפה, פרט אולי ל $x,y\neq0$. $F_y(x,y)=\frac{2-y}{x^2y^3}$, $x,y\neq0$ רציפה פרט אולי ל $x,y\neq0$. לכן, נחפש מלבן פתוח המכיל את $(1,2)$, <u>שלא נוגע</u> בצירים x,y. המלבן המקסימלי המקיים זאת הוא: $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$ (הרביע הראשון). לכן, תחום ההגדרה הגדול ביותר של הפתרון היחיד לפי משפט הקיום הוא: <u>$x>0$</u>.

כעת, נמצא את הפתרון (היחיד) המוגדר ב-$x>0$: נשים לב ש- $y\equiv1$ לא מקיים את תנאי ההתחלה: $y(1)=2$. נותר לנו רק הפתרון הכללי:

לכן, נציב בפתרון הכללי ונקבל: $\frac{2^2}{2}+2+\ln|2-1|+\frac{1}{1}=c$

$$5=c$$

$$\Downarrow$$

הפתרון הוא: $\boxed{\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|+\frac{1}{x}=5\ ,\ x>0}$

<u>הערה:</u> משפט הקיום והיחידות הוא חד-כיווני, כלומר אם התנאים לא מתקיימים <u>לא ניתן להסיק</u> שלא קיים פתרון יחיד, אלא יש 3 אפשרויות: פתרון יחיד, כמה פתרונות (אינסוף), או שאין פתרון.

בדוגמה הקודמת, למשל, אם תנאי ההתחלה היה $y(0)=0$, המשפט לא מתקיים, אבל בכל מקרה אין פתרון כי $y\equiv1$ לא מקיים, ולא ניתן להציב את זה בפתרון הכללי.

עבור $y(1)=0$ (נניח), המשפט לא מתקיים, <u>אבל</u> יש פתרון יחיד: הסינגולרי לא מקיים את... אבל אם נציב $x=1, y=0$ בכללי נקבל $c=1$.

משוואות שניתן להפוך לפרידות

$y' = f(ax+by+c)$ (a,b לא שניהם 0)

דוגמא: פתור את המשוואה $y' = \sqrt{2x+y-1}$.

פתרון: נשים לב כי הביטוי מופיע בסוגריים, נבצע שינוי משתנה חדש:

$v(x) = 2x+y(x)-1 \Rightarrow v'(x) = 2+y' \Rightarrow y' = v'-2$

נציב במשוואה הנתונה ונקבל: כש $v \ge 0$: $v'-2=\sqrt{v}$, לכן: $v' = 2+\sqrt{v}$.

לכן, $\frac{dv}{dx} = 2+\sqrt{v} \xRightarrow{\text{הפרדת משתנים}} \frac{dv}{2+\sqrt{v}} = dx \Rightarrow \int \frac{dv}{2+\sqrt{v}} = \int dx = x+c$.

$$\int \frac{dv}{2+\sqrt{v}} = \int \frac{2t\,dt}{2+t} = \int \left(2-\frac{4}{2+t}\right)dt = 2t - 4\ln|2+t| + c = 2\sqrt{v} - 4\ln(\sqrt{v}+2)+c$$

לכן:

$$2\sqrt{v} - 4\ln(\sqrt{v}+2) = x+c$$

$$\Downarrow$$

הפתרון הוא: $2\sqrt{2x+y-1} - 4\ln(\sqrt{2x+y-1}+2) = x+c$.

(נחזור ל- $y(x)$) $\Uparrow$

$v = 2x+y-1$

$2x+y-1 \ge 0 \Rightarrow \boxed{y \ge 1-2x}$

משוואות הומוגניות לא לינאריות מסדר ראשון

בתחום $D \in \mathbb{R}^2$

הגדרה: פונקציה של שני משתנים $f(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר k $(k\in\mathbb{R})$ אם לכל $\lambda>0$ ולכל $(x,y)\in D$ מתקיים: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y)$.

למשל:
- $f(x,y)=x^3-x^2y$ הומוגנית מסדר 3, כי: $F(\lambda x,\lambda y) = \lambda^3x^3 - \lambda^2x^2(\lambda y) = \lambda^3(x^3-x^2y) = \lambda^3 f(x,y)$ $(\lambda>0)$
- $g(x,y)=x^3+\cos x$ לא הומוגנית משום סדר, כי לא ניתן להוציא λ החוצה מ-$\cos(\lambda x)$.

הגדרה: משוואה מסדר ראשון: $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ נקראת הומוגנית בתחום D, אם M,N הומוגניות ב-D מאותו סדר.

B משוואה הומוגנית ניתן לרשום בצורה: $y'=g\left(\frac{y}{x}\right), x\ne0$, ואז נסמן: $z(x)=\frac{y(x)}{x}$ נקבל משוואה פרידה.

דוגמא - פתור: $\begin{cases}(x^2-y^2)dx+2xy\,dy=0\\ y(1)=1\end{cases}$. משוואה זו הומוגנית כי: $M(x,y)=x^2-y^2$, $N(x,y)=2xy$ הוא מסדר 2.

לכן, נקבל: $x^2-y^2+2xy\cdot y'=0 \Rightarrow y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$ $\left[\begin{matrix}x\ne0\\ y\ne0\end{matrix}\right]$

$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$.

(נסמן: $z(x)=\frac{y(x)}{x}$, לכן: $y(x)=x\cdot z(x)$

$\boxed{y'=z+xz'}$

נציב במשוואה האחרונה שקיבלנו ("כוכביתית") ונקבל:

$z+xz'=\frac{z^2-1}{2z}, \quad z\ne0 \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = -\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)$

נפריד:

$\Rightarrow \frac{2z}{z^2+1}dz = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(z^2+1) = \int\frac{2z}{z^2+1}dz = -\int\frac{dx}{x} = -\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$

$\forall z: z^2+1\ne0 \Rightarrow$

$z^2+1=\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow z^2 = \left|\frac{c}{x}\right|-1 \Rightarrow z(x)=\pm\sqrt{\left|\frac{c}{x}\right|-1}$, $\quad \left|\frac{c}{x}\right|\ge1$

$y=\pm x\sqrt{\left|\frac{c}{x}\right|-1}$

נציב תנאי התחלה ונקבל: $1=1\sqrt{\frac{c}{1}-1}$ $\Leftarrow$ $c=2$ $\Leftarrow$ $\boxed{y(x)=x\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$

$0<x\le2$