

פיסיקה למתמטיקאים

מערכות ייחוס מסתובבות

1. הוכיחו כי מרחק נקודה על פני כדור הארץ "האמיתי" (ביחס לכדור הארץ הספרי) h נתון ע"י

$$h = R \left(\frac{R\omega^2}{6g} \right) (3 \sin^2 \theta - 2),$$

כאשר θ מעלת קו הרוחב ביחס לצייר הסיבוב, ו R רדיוס כדור"א".
נסמו ב x את המרחק מציר הסיבוב אזי הכח הצנטריפוגלי $F_c = m\omega^2 x^2$ נגזר מפוטנציאל $V_c = -m\omega^2 x^2/2$. פוטנציאל הגרביטציה (שנניח כי מתאפס על פני כדור"א הספרי) הינו $V_g = mgh$. על מנת שמסת חומר נקודתית תהיה במנוחה הפוטנציאל הכולל חייב להיות קבוע, כלומר

$$mgh - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = C.$$

כעת בקרוב, $x \approx R \sin \theta$ ונסמן $B = C/mg$ על מנת לקבל

$$(1) \quad h(\theta) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \sin^2 \theta + B.$$

השינוי בנפח לעומת הכדור הספרי הינו (בידקו!) $\mathcal{O}(h/R)$, לכן בקרוב טוב ניתן להניח כי הנפח נשמר, כלומר

$$(2) \quad 2\pi R^2 \int_0^\pi h(\theta) \sin \theta d\theta = 0.$$

מתנאי (2) נקבל $B = -\omega^2 R^2/3g$, ומהצבה ב (1) נקבל

$$h = R \left(\frac{R\omega^2}{6g} \right) (3 \sin^2 \theta - 2).$$

אנו רואים כי ככל שמתרחקים מהקטבים, כדור"א הופך פחוס יותר בגלל הכח הצנטריפוגלי. על קו המשווה ($\theta = \pi/2$) $h_{max} \simeq 3.5 \times 10^3 m$.

2. גוף נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות v_0 . הראו כי המקום בו נופל הגוף מוסט מערבה מנקודת הזריקה למרחק השווה ל

$$\Delta = -\frac{4}{3}\omega \cos \theta \left(\frac{8h^3}{g} \right)^{1/2},$$

כאשר θ מעלת קו הרוחב (ביחס לקו המשווה) ו h הגובה המקסימלי.
 נחשב את תאוצת קוריוליס $\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}$ כאשר $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. נקבל

$$a_c = -2\omega \cos \theta (v_0 - gt),$$

כלומר עד לרגע בו הגובה מקסימלי, הסטייה מערבה ולאחר מכן, מזרחה.
 מאינטגרציה פעמיים על התאוצה נקבל

$$(3) \quad \Delta = -\omega \cos \theta (v_0 \tau^2 - g\tau^3/3),$$

כאשר τ רגע הפגיעה בקרקע. משימור אנרגיה $mv_0^2/2 = mgh$ ומהדרישה
 המבוקש. $y(\tau) = v_0\tau - g\tau^2/2 = 0$ נקבל $\tau = \sqrt{8h/g}$ ומהצבה ב (3) נקבל את הביטוי

נניח כי טיל (ללא דלק) נורה בקו רוחב $\theta = \pi/3$ למרחק 50 ק"מ ומגיע
 לגובה מקסימלי של 25 ק"מ. הסטייה במקרה כזה בגלל כח קוריוליס
 $\Delta \approx 5 \times 10^2 m$ מערבה! (נשים לב כי אין זה משנה לאיזה כוון הטיל נורה).
 בנוסף, אם נורה (מעל קו המשווה) צפונה (דרומה) תהייה סטייה דרומה
 (צפונה) בגלל הכח הצנטריפוגלי.