

524-88-תרגיל 5-פתרון:

1. א. האם קיימת העתקה פרויקטיבית מהישר הפרויקטיבי RP^1 לעצמו השולחת את 1,2,3,4 ל- -5,-3,-2,0 בהתאמה?

ב. האם קיימת העתקה פרויקטיבית מהישר הפרויקטיבי RP^1 לעצמו השולחת את הקבוצה $\{1,2,3,4\}$ לקבוצה $\{-5,-3,-2,0\}$ אם כן, מצא אותה.

אם ניקח בחשבון את כל הערכים שיכולים להתקבל עבור ארבעתם כפי $R(1,2,3,4) = \frac{2}{1} \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$,

הוכחנו, נקבל: $4, \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

אם ניקח בחשבון את כל הערכים שיכולים להתקבל עבור ארבעתם כפי $R(-5,-3,-2,0) = \frac{3}{1} \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$,

הוכחנו, נקבל: $\frac{9}{4}, \frac{5}{9} = \frac{4}{9}, -5, \frac{5}{9} = -\frac{1}{5}, 1 - \frac{9}{5} = -\frac{4}{5}, \frac{5}{9}, \frac{9}{5}$

ניתן לראות כי אין ביניהם שום ערך כפול משותף ולכן אין העתקה פרויקטיבית.

ג. האם קיימת העתקה פרויקטיבית מ RP^1 לעצמו השולחת את 0 ל ∞ , את 1 ל 5, את 3 ל- 3.5 ואת 2 ל 3?

אם קיימת אז $3/4 = R(0,1,3,2) = R(\infty,5,3.5,3) = -4/3$ סתירה.

ד. הוכיחו שקיימת העתקה פרויקטיבית השולחת את הקבוצה $\{0,1,2,3\}$ לקבוצה $\{\infty,5,3.5,3\}$ ומצאו אותה במפורש (ז"א: a,b,c,d כך ש- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$).

קיימות כמה כאלו, לדוגמא: $f(x) = \frac{2x+3}{x}$

לאן ההעתקה שולחת את 2? מהן נקודותיה הכפולות אם יש (כלומר, שנשלחות לעצמן).

$f(2) = 3.5$

נקודות כפולות:

$x = \frac{2x+3}{x} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$

2. תהיינה D, C, B, A נקודות שונות על הישר הפרוייקטיבי.
 א. מתי קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי לעצמו השולחת:
 $A \mapsto B, B \mapsto A, C \mapsto C, D \mapsto D$ (ז"א תארו מה המצב היחסי בין כל נקודה לאחרות).

$$R(A, B, C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = R(B, A, C, D) = \frac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD} \Rightarrow R = 1/R \Rightarrow R = \pm 1$$

אם $R = 1$: אז $C = D$ או $A = B$ בסתירה לנתון ולכן לא יתכן.
 אם $R = -1$: אז אחד מבין D, C בין A ל B ואחד מהם מחוץ ל AB .

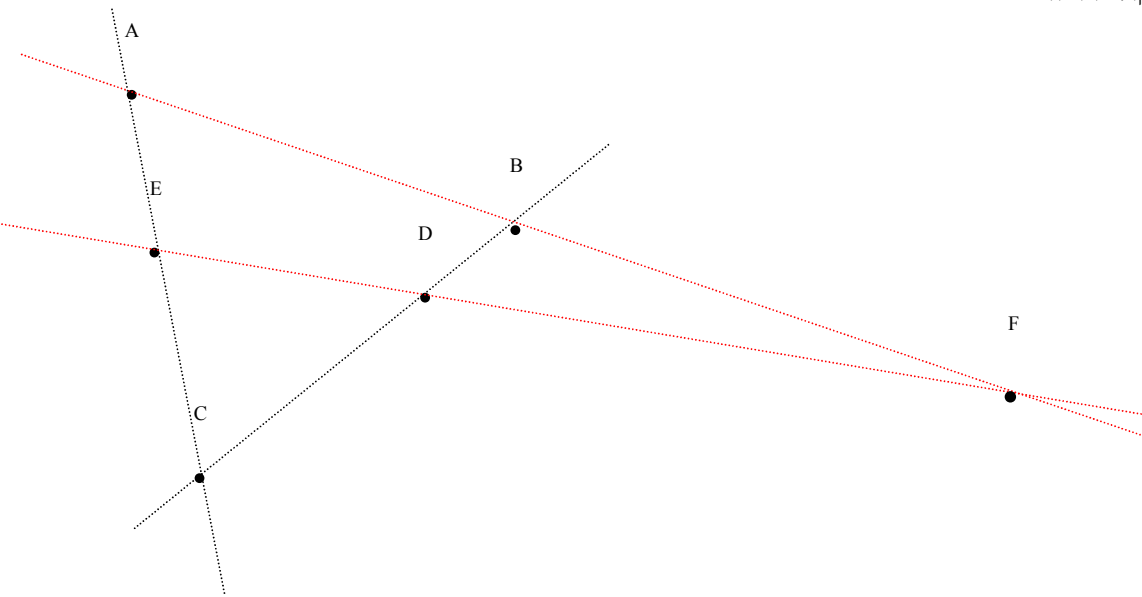
- ב. מתי קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי לעצמו השולחת:
 $A \mapsto D, B \mapsto B, C \mapsto C, D \mapsto A$?

$$R(A, B, C, D) = R(D, B, C, A) = 1 - R(A, B, C, D) \Rightarrow R(A, B, C, D) = 0.5$$

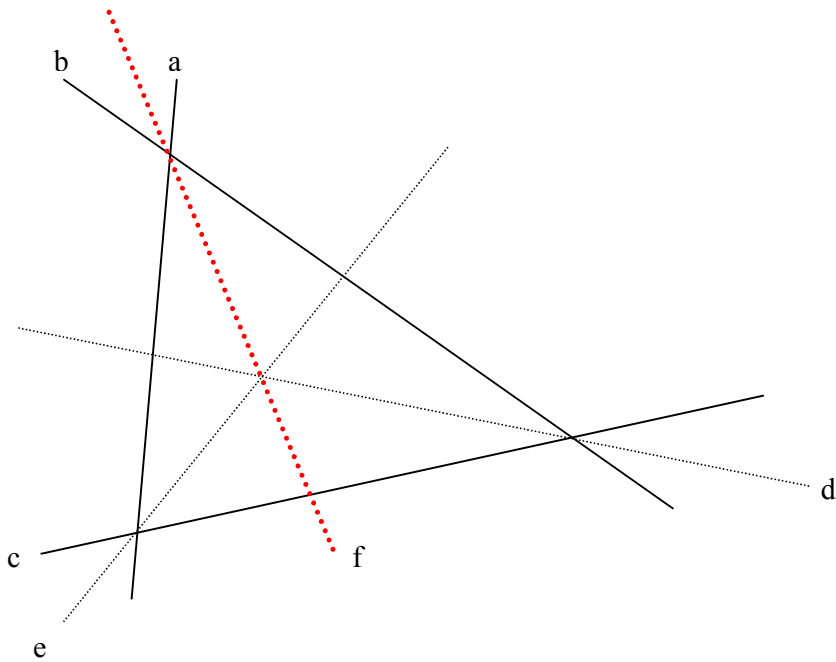
D, C או שתיהן בין A ל B או שתיהן מחוץ ל AB .

3. ציירו ציורים מתאימים לטענות הבאות, נסחו את הטענה הדואלית וציירו גם עבורה:

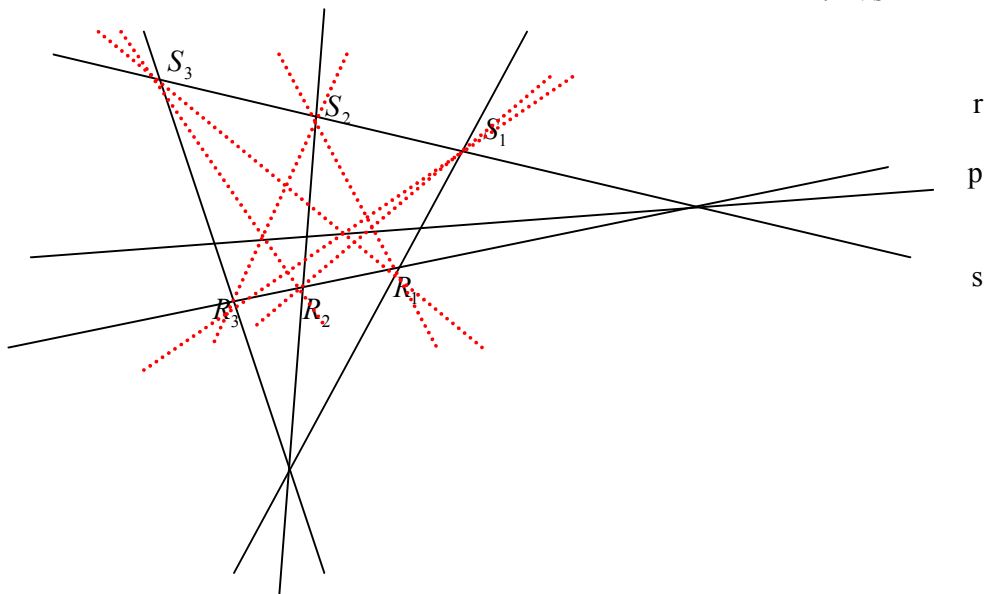
- א. C, B, A נקודות שונות לא קולינאריות, D, E נקודות שונות כך ש C, B, D קולינאריות ו- A, E, C קולינאריות. אז יש נקודה F כך ש- F, B, A קולינאריות ו- F, E, D קולינאריות



דואלי: a, b, c ישרים שונים לא קונקורנטיים. d, e ישרים שונים כך ש- c, b, d קונקורנטיים ו- a, e, c קונקורנטיים. אז יש ישר f כך ש- a, b, f קונקורנטיים ו- f, e, d קונקורנטיים.



ב. (משפט פפוס הזעיר): R_1, R_2, R_3 הן נקודות שונות על ישר r , S_1, S_2, S_3 נקודות שונות על ישר s ו- R_1S_1, R_2S_2, R_3S_3 קונקורנטיות בנקודה P . אז הנקודות $R_2S_3 \cap R_3S_2, R_1S_3 \cap R_3S_1, R_1S_2 \cap R_2S_1$ נמצאות על ישר p שהוא קונקורנטי עם r ו- s .



דואלי: r_1, r_2, r_3 הם ישרים שונים הנפגשים בנקודה R , s_1, s_2, s_3 הם ישרים שונים הנפגשים בנקודה S ו- $r_1 \cap s_1, r_2 \cap s_2, r_3 \cap s_3$ קולינאריות בישר p . אז הישרים

$r_2 \cap s_3 = r_3 \cap s_2$, $r_1 \cap s_3 = r_3 \cap s_1$, $r_1 \cap s_2 = r_2 \cap s_1$
 P נקודה בנקודה P
 שהיא קולינארית עם R ו-S.

