תרגיל בית 8 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ד טבת ה'תשע"ז, 22.1.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. נתונות התמורות הבאות בחבורה S_7: $\sigma = (13472)$, $\tau = (142)$, $a = (132)(5467)$.
חשבו את:

א. $a\sigma a^{-1}$.

ב. $a\tau a^{-1}$.

שאלות להגשה

שאלה 2. נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{5} + \mathbb{Z}, \frac{3}{14} + \mathbb{Z} \right\rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{5}$ ו-$\frac{3}{14}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G : H]$.

שאלה 3. תהי חבורה G. נגדיר את תת-חבורת הקומוטטורים שלה להיות

$$[G, G] = \left\langle \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\} \right\rangle$$

הוכיחו:

א. הוכיחו שלכל אוטומורפיזם $\phi : G \to G$ מתקיים: $\phi([G, G]) \leq [G, G]$.

ב. הסיקו ש: $[G, G] \lhd G$ (רמז: התסכלו על ההעתקה מהצורה: $f_g(x) = gxg^{-1}$. לכל $g \in G$ זהו אוטומורפיזם של G).

ג. $G/[G,G]$ חבורה אבלית.

שאלה 4. נתונה התמורה $\pi = (1234)(567)(89) \in S_9$.
מצאו את מספר התמורות הצמודות לתמורה π.

שאלה 5. נתונה התמורה $(142) \in S_4$.

א. מצאו את מחלקת הצמידות שלה ב-S_4.

ב. מצאו תמורה σ הצמודה ל-(142) ב-S_4, אבל לא ב-A_4. הוכיחו את קביעתכם.

שאלה 6. הוכיחו כי $S_n = \langle (12), (12\ldots n) \rangle$ בצעדים הבאים: ראשית, היזכרו כי S_n נוצרת על ידי החילופים, כלומר

$$S_n = \langle \{(ij) | 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \rangle$$

א. הראו כי כל חילוף מהצורה $(1k)$ אפשר להציג כמכפלת חילופים מהצורה $(m, m+1)$, והסיקו כי

$$S_n = \langle (12), (23), \ldots, (n-1, n) \rangle$$

ב. הראו כי $S_n = \langle (12), (12\ldots n) \rangle$ על ידי נוסחת ההצמדה ב-S_n.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 7. (המשך שאלה 6) הראו כי אם σ הוא מחזור מאורך n כלשהו, ואם τ חילוף עוקב כלשהו (כלומר הוא חילוף מהצורה $(m-1, m)$, או החילוף $(n1)$), אזי מתקיים $S_n = \langle \tau, \sigma \rangle$. זו למעשה הכללה של השאלה, המראה כי יכולנו לבחור כל מחזור מאורך n וכל חילוף עוקב, ולא רק את אלו הנתונים.

שאלה 8. (המשך שאלה 6) הראו כי אם p ראשוני, σ הוא מחזור מאורך p כלשהו, ואם τ חילוף כלשהו (לא בהכרח חילוף עוקב), אזי מתקיים $S_p = \langle \tau, \sigma \rangle$ (רמז: אם $\tau = (ab)$, מצאו חזקה של σ, σ^k, כך ש: $\sigma^k(a) = b$. אחר כך, חשבו את הסדר של σ^k, השתמשו באוטומורפיזם הצמדה מסויים של S_p, ובתרגיל הקודם).

שאלה 9. הוכיחו:

א. A_n נוצר על ידי כל המחזורים מאורך 3.

ב. A_n נוצר על ידי כל המחזורים מהצורה $(1ij)$.

ג. (*) A_n נוצר על ידי כל המחזורים מהצורה $(12i)$.

בהצלחה!