תרגול מס' 8 במבנים אלגבריים 1

החבורה הסימטרית

<u>הגדרה</u>: קבוצת כל התמורות של $X=\{1,2,\dots,n\}$ נקראת ***חבורת התמורות*** או ***החבורה הסימטרית***.

הסימון שלה הוא: S_X או S_n. ברור מתוך ההגדרה כי: $|S_n|=n!$.

עגיל (או ***מחזור***) הוא תמורה המציינת מעגל אחד של החלפות של מספרים שונים:

$a_1\mapsto a_2\mapsto\dots\mapsto a_k\mapsto a_1$ ומסומן ע"י: $(a_1,\dots,a_k)$.

<u>הערות</u>:

- כל איבר של החבורה הסימטרית ניתן לכתיבה כמכפלה של עגילים זרים.
- סדר של כל עגיל שווה לאורכו.
- סדר של מכפלת עגילים זרים הוא הכמק"ב של סדרי (=אורכי) העגילים.
- במכפלה של עגילים זרים אין חשיבות לסדר הופעתם במכפלה – (מכפלתם היא קומוטטיבית).
- אפשר לכתוב הופכי של כל עגיל ע"י הפיכת סדר האיברים בעגיל.
- הופכי של איבר הנתון ע"י מכפלת עגילים זרים שווה למכפלת העגילים ההופכיים.

<u>דוגמה</u>: תהא: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&6&1&8&4&7&2\end{pmatrix}\in S_8$ מצא את: $\sigma^{-1},o(\sigma)$

<u>פתרון</u>: $\sigma=(1\ 3\ 6\ 4)(2\ 5\ 8)(7)$ לכן: $o(\sigma)=[4,3,1]=12$, $\sigma^{-1}=(4631)(852)(7)$.

<u>הגדרה</u>: כל עגיל באורך 2 נקרא **חילוף**.

תמורה תקרא **זוגית** אם היא ניתנת לכתיבה כמכפלה של מס' זוגי של חילופים. אחרת תקרא **אי-זוגית**.
(כל תמורה היא או זוגית או אי זוגית). קל לראות שזו ת"ח. כמו כן כיוון שמחצית מהתמורות הן זוגיות,
האינדקס של ת"ח זו הוא 2 ולכן היא תח"נ של S_n ומסומנת: $A_n\triangleleft S_n$.

דוגמה:

$$S_3=\{id,(12),(13),(23),(123),(132)\}$$
$$A_3=\{id,(123),(132)\}.$$

הערה: כל עגיל באורך r ניתן לכתיבה כמכפלה של $r-1$ חילופים:

$$(a_1\ a_2 \dots a_r)=(a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\cdots(a_{r-1}\ a_r).$$

אלגוריתם לקביעת הזוגיות של תמורה:

- נכתוב אותה כמכפלה של עגילים זרים.
- אם מס' העגילים מסדר זוגי הוא זוגי, אזי התמורה היא זוגית.

הוכחה: כל עגיל מסדר זוגי ניתן לכתיבה כמכפלה של מס' אי-זוגי של חילופים. לעומתו, עגיל מסדר אי-זוגי מוסיף למכפלה מס' זוגי של חילופים ולא משפיע על הזוגיות של הכוללת. לכן אם ישנו מס' אי זוגי של עגילים זוגיים אז בסה"כ מס' החילופים יהיה אי-זוגי וזו תהיה תמורה אי-זוגית, ולהיפך.

דוגמה: $(1\ 2\ 4)(3\ 5)(6\ 7\ 8\ 9)=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\\ 2\ 4\ 5\ 1\ 3\ 7\ 8\ 9\ 6\end{pmatrix}$ קיבלנו שני עגילים זוגיים ולכן התמורה זוגית.

תרגיל: כמה עגילים מסדר r קיימים ב- S_n ? $(r\le n)$

פתרון: $\binom{n}{r}\cdot(r-1)!$.

תרגיל:

א. מצא תת-חבורה מסדר 45 ב- S_{15}.

ב. כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה A_n עבור $n\le 8$?

פתרון:

א. ניקח תמורה מסדר 45 והיא תיצור לנו תת-חבורה מסדר 45. כיוון שלא יתכן עגיל באורך 45 ב- S_{15}, ניקח תמורה שהיא מכפלה של שני עגילים זרים מסדר 9 ו-5. כיוון ש5 ו-9 הם זרים, אז

הכמק"ב שלהם שווה למכפלתם וזהו גם סדר התמורה. לדוגמה:

$H=\langle\sigma\rangle=\langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)(10\ 11\ 12\ 13\ 14)\rangle$. $|H|=|\sigma|=[9,5]=45$.

ב. כדי שתמורה תהיה מסדר 2, היא צריכה – כמכפלה של מחזורים זרים – להכיל רק חילופים. אם בנוסף התמורה היא זוגית, היא צריכה להכיל מס' זוגי של חילופים. לכן ב- A_2, A_3 אין איברים מסדר 2 שכן כדי שהמכפלה תכיל 2 חילופים זרים צריכים להיות לפחות ארבעה איברים.

ב- A_4, A_5, A_6, A_7 איברים מסדר שני הם מכפלה של שני חילופים זרים (הסדר הפנימי בכל חילוף, והסדר בין שני החילופים לא משנה) ולכן המספר הוא: $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

ב- A_8 יש גם אפשרות של מכפלה של ארבעה חילופים זרים ולכן בסה"כ המספר הוא:

$$\frac{1}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}+\frac{1}{4!}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}=210+105=315 .$$

<u>תרגיל:</u> במסגרת מרובעת של $n\times m$ משבצות מצויר ציור. באחת הפינות במסגרת חסרה משבצת, כדי לאפשר תזוזה של המשבצות הקרובות בצורה אנכית ואופקית. החליפו בין מקומות של שתי משבצות כלשהן (בצורה לא חוקית). מהו לכל היותר מספר התזוזות שיאפשר את החזרת התמונה לקדמותה ?

<u>פתרון:</u>

כדי שהפינה החסרה תחזור להיות חסרה לאחר תזוזות כלשהן, ניתן להפעיל על מקומות המסגרת תמורות זוגיות בלבד. החלפת המקומות הראשונית של שתי המשבצות היא חילוף אחד, כלומר תמורה אי-זוגית. מכאן שגם ההפוכי של תמורה זו הוא תמורה אי-זוגית. לכן לא ניתן אף פעם – ע"י תזוזות (זוגיות) בלבד – להחזיר את המצב לקדמותו.