תרגיל בית 10 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. מצאו כמה פולינומים מתוקנים אי פריקים יש ממעלה 4 מעל $\mathbb{F}_3$.

שאלה 2. הזכרנו שהנורמה כפלית והעקבה חיבורית (זה נובע מכך שאיברי חבורת גלואה הם הומומורפיזמים של חוגים). כעת תוכיחו שהן גם טרנזיטיביות. תהי $F \subseteq L \subseteq K$ שרשרת שדות כך שכל ההרחבות הן גלואה. הוכיחו

$$\mathrm{N}_{K/F} = \mathrm{N}_{L/F} \circ \mathrm{N}_{K/L} \qquad \mathrm{Tr}_{K/F} = \mathrm{Tr}_{L/F} \circ \mathrm{Tr}_{K/L}$$

שאלה 3. יהי $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$.

א. שכנו את השדה K בחוג $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(K) \cong M_3(\mathbb{Q})$ לפי הזיהוי שראינו.

ב. מצאו את הנורמה והעקבה של כל איבר $\alpha = a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} \in K$.

ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{3} \notin K$. רמז: מצאו עקבות.

שאלה 4. יהי $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$. חשבו את $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(\alpha)$ ואת $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(\alpha)$.

שאלה 5. יהי $f(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ פולינום אי פריק ממעלה 3 ויהי a שורש שלו (בשדה הפיצול). הוכיחו כי $a^{13} \in \mathbb{F}_3$.

שאלה 6 (רשות)**.** יהי $n > 1$ טבעי, ונתבונן בפולינום הציקלוטומי $\Phi_n(x)$.

א. יהי $a \in \mathbb{Z}$ ויהי p ראשוני המחלק את $\Phi_n(a)$. הוכיחו כי $p|n$ או $p \equiv 1 \,(\mathrm{mod} n)$. רמז: הפולינום $x^n - 1$ הוא ספרבילי מודולו p אם $p \nmid n$. מה הוא הסדר של $a \in U_p$?

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שישנם אינסוף מספרים ראשוניים כך ש-$p \equiv 1 \,(\mathrm{mod} n)$.

שאלה 7 (רשות)**.** יהי n טבעי. בשאלה זו נראה הכללה לשאלות 6 ו-7 מתרגיל בית 9 שתאפשר לחשב את הפולינום הציקלוטומי $\Phi_n(x)$ קצת יותר מהר.

א. יהי p ראשוני. הוכיחו שאם p זר ל-n, אז $\Phi_{pn}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x^p)$. אחרת, אם $p|n$, הוכיחו כי $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)$.

ב. יהי r הרדיקל של n (כלומר מכפלת הראשוניים שמחלקים את n). הוכיחו שהפולינום הציקלוטומי מקיים $\Phi_n(x) = \Phi_r(x^{n/r})$.

בהצלחה!