אינפי 1 – תרגיל 3

<u>תזכורת</u>: עבור $\alpha > 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \infty$ ועבור $|\alpha| < 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$

1. עבור הסדרות הבאות, מצא האם קיים גבול, ואם כן מצא אותו והוכח שהוא אכן הגבול (בשימוש בהגדרת הגבול, שלילת גבול או אריתמטיקה של גבולות):

א. $\frac{1}{\sqrt{n}}$

פתרון: נוכיח שהגבול הוא 0. יהיו $\varepsilon > 0$ צ"ל n_0 כך שלכל $n > n_0$ $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$. זה נכון אם ניקח $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$

ב. $\frac{1}{n}\sin(n!)$

פתרון: $\frac{1}{n} \to 0$, $-1 \le \sin(n!) \le 1$ כלומר חסומה ולפי משפט הכפל שלהן שואף לאפס.

ג. $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$

פתרון: $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = \frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)} = \frac{n}{n+2} \to 1$

ד. $\frac{3^{n-1}}{2^n}$

פתרון: $\frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{3}\frac{3^n}{2^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$ ($a^n \to \infty$ אם $a > 1$, $a^n \to 0$ אם $a < 1$)

ה. $\frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}}$

פתרון: $n^2 > 2n$ עבור $n \ge 2$. לכן פרט לאיבר הראשון $0 \le \frac{3^n}{2^{\left(n^2\right)}} < \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{\left(2^2\right)^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$

2. ידוע ש $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$ עבור כל סדרה a_n המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$. מצא את הגבול

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ עבור $a\in\mathbb{R}$. שים לב להבחין בין שני מקרים של a.

פתרון: אם $a>0$, $\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a$ $= \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ מכיוון ש $\frac{n}{a}\to\infty$

אם $a<0$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)=\left(\frac{n+a}{n}\right)=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+a}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{n+a-a}{n+a}\right)}=\frac{1}{\left(1+\frac{-a}{n+a}\right)}=\left(1+\frac{1}{-\frac{n+a}{a}}\right)^{-1}$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{-\frac{n+a}{a}}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{-\frac{n+a}{a}}\right)^{-n\frac{n+a}{a}\frac{a}{n+a}}=\left(\left(1+\frac{1}{-\frac{n+a}{a}}\right)^{-\frac{n+a}{a}}\right)^{a\frac{n}{n+a}}\to e^a$$

מכיון ש $-\frac{n+a}{a}\to\infty$, $a\frac{n}{n+a}\to a$.

3. הוכח: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$

פתרון: יהי $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $|a_n|=|a_n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow ||a_n||<\varepsilon$, מ.ש.ל.

4. הוכח: אם a_n מתכנסת אזי היא חסומה מלעיל ומלרע

פתרון: ניקח $\varepsilon=1$ אזי קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$, $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$. ניקח $n_1>n_0$ כלשהוא ונגדיר $M=\max\{a_1,....a_{n_1},L+\varepsilon\}$ ו $m=\min\{a_1,....a_{n_1},L-\varepsilon\}$ אזי $\forall n\in\mathbb{N}: m\le a_n\le M$.

5. הוכח/הפרך:

א. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, אזי $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

הוכחה: נניח $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, יהי $\varepsilon>0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-a|<\varepsilon$ ולפי אי השיוויון שלמדנו בשיעור הראשון, $||a_n|-|a||\le|a_n-a|<\varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

ב. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

הפרכה: ייתכן של $\{a_n\}$ אין אפילו גבול. $|(-1)^n|\to 1=1$ אבל ל $a_n=(-1)^n$ אין גבול.

ג. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ ו a_n מתכנסת, אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

הפרכה: $a_n=(-1)\to(-1)\neq 1$ אבל $a=1$, $|a_n|\to|1|$

ד. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ מתכנסת במובן הרחב לאינסוף או למינוס אינסוף.

הפרכה: ייתכן של b_n אין גבול כלל. $b_n=(-1)^n n$, $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ בעל גבולות חלקיים $\pm\infty$

ה. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $b_n=\left|\dfrac{1}{a_n}\right|$ מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

פתרון: אם נניח ש $a_n\neq 0$ החל ממקום מסוים בסדרה יהיה ניתן להוכיח כך: נניח $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. לכל $\varepsilon>0$ לכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n|<\varepsilon$. לכן לכל $M>0$ ניקח $\varepsilon=\dfrac{1}{M}>0$, לכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n|<\varepsilon=\dfrac{1}{M}$ ולכן $\left|\dfrac{1}{a_n}\right|=\dfrac{1}{|a_n|}>M$.

אבל, ייתכן ו $a_n=0$ אינסוף פעמים בסדרה, ואז לסדרה b_n יש אינסוף איברים שאינם מוגדרים, ולכן היא לא מוגדרת ואין לה גבול.

ו. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אזי $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$

הפרכה: $a_n=\dfrac{1}{n}\to 0$ אבל $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\dfrac{n}{n+1}\to 1$

6. מצא את גבול הסדרה $\sqrt[n]{a}$ עבור $0\le a\in\mathbb{R}$ והוכח שהוא אכן הגבול. רמזים:

* הפרד בין מקרים שונים של a

* חוק הסנדביץ': אם $a_n\to L$ ו $b_n\to L$ ו $a_n\le c_n\le b_n$ אזי $c_n\to L$. השתמש בחוק זה ובגבולות של סדרות שלמדנו

*אריתמטיקה של גבולות

פתרון: נניח $a>1$ אזי $1\le\sqrt[n]{a}$ אחרת $1>\sqrt[n]{a}$ נעלה בחזקת n ונקבל $a<1$ בסתירה. ניקח $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש $n_0>a$ אזי לכל $n>n_0$ מתקיים $\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{n}$. לכן פרט למספר סופי של איברים $1\le\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{n}$. למדנו בכיתה ש $\sqrt[n]{n}\to 1$ ולכן לפי משפט הסנדביץ' $\sqrt[n]{a}\to 1$.

נניח $a=1$ אזי ברור ש $\sqrt[n]{a}=1\to 1$

נניח $a<1$, אזי $b=\frac{1}{a}>1$ אזי $\sqrt[n]{b}\to 1$ כלומר $\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\to 1$ לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}=\frac{1}{1}=1$

עבור $a=0$ ברור ש $\forall n\in\mathbb{N}:\sqrt[n]{a}=0$ ולכן $\sqrt[n]{a}\to 0$

7. תהי a_n סדרה מתכנסת לגבול ממשי $L\in\mathbb{R}$. תהי b_n סדרה חסומה שאינה מתכנסת. הוכח: הסדרה $c_n=a_nb_n$ מתכנסת אם"ם $L=0$

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=M\in\mathbb{R}$ צריך להוכיח $L=0$. נניח בשלילה $L\neq 0$ לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\frac{M}{L}$ אבל $\frac{c_n}{a_n}=b_n$ ולכן קיבלנו ש b_n מתכנסת בסתירה. (שימו לב ש $\frac{c_n}{a_n}=b_n$ רק כאשר $a_n\neq 0$ אבל זה נכון אולי פרט למספר סופי של איברי a_n מכיוון שגבול הסדרה שונה מאפס).

$\Rightarrow$ נניח $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, הוכחנו בכיתה שהמכפלה של סדרה ששואפת לאפס בסדרה חסומה, שואפת לאפס.