

פיתרון לתרגיל 4

תשובה 1:

נסמן ב- $G=True$ הדשא רטוב. $G=False$ הגשם אינו רטוב. (לשם קיצור נסמן T ו-F בהתאמה)
נסמן ב- $S=T$ הממטרה פועלת. $S=F$ הממטרה לא פועלת. באופן דומה $R=T$ יורד גשם. $R=F$ לא יורד גשם אזי לפי נוסחאת בייס נקבל:

$$P(A, B, C) = P(A \cap B \cap C) \text{ ובאופן דומה } P(A, B) = P(A \cap B)$$

במעבר השני משתמשים במונה ובמכנה בעיקרון :

$$P(A) = P(A \cap (B \cup B^c)) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

לדוגמא במונה:

$$P(G = T, R = T) = P(G = T, (S = T) \cup (S = F), R = T) =$$

$$= P(G = T, S = T, R = T) + P(G = T, S = F, R = T)$$

בקטן מסומן עבור כל מספר מאיזו אפשרות הגיע: TTF מסמן $G=T, S=T, R=F$.

$$P(R = T | G = T) = \frac{P(G = T, R = T)}{P(G = T)} = \frac{\sum_{S \in \{T, F\}} P(G = T, S, R = T)}{\sum_{S, R \in \{T, F\}} P(G = T, S, R)}$$
$$= \frac{0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.8_{TTF} + 0.8 \cdot 0.99 \cdot 0.8_{TFT}}{0.99 \cdot 0.01 \cdot 0.8_{TTF} + 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.2_{TTF} + 0.8 \cdot 0.99 \cdot 0.8_{TFT} + 0 \cdot 0.6 \cdot 0.2_{TFF}}$$
$$= \frac{1.4435}{1.5155} = 0.952$$

המעבר מהשורה הראשונה לשניה (הצבת הערכים המספריים) מתבסס על הזהות הבאה הנגזרת מכלל בייס
: $P(X|Y)P(Y) = P(X, Y)$

$$P(X, Y, Z) = P(X|Y, Z)P(Y, Z) = P(X|Y, Z)P(Y|Z)P(Z)$$

תשובה 2: (שאלה מהכיתה)

נסמן ב- Y את המשנתה המקרי המציין הצלחה בהוצאת אדום וכישלון אחרת.

מספר הראשים המתקבלים X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n, p , דהיינו $X \sim \text{Bin}(n, p)$. בהינתן $X = k$ (שלם לא שלילי) הסיכוי להוציא כדור אדום הוא $1/(k+1)$ שכן הוכנסו לכדור k כדורים לבנים ואדום יחיד. דהיינו $Y|X = k$ הוא משנתה ברנולי עם פרמטר $1/(k+1)$. בקיצור $Y|X \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{1+X}\right)$. עתה לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(Y = 1) = \sum_{k=0}^n P(Y = 1|X = k) \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{1+k}\right) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$\frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k}$$

נציב $t = k + 1$ ונקבל:

$$\frac{1}{p(n+1)} \sum_{t=1}^{n+1} \binom{n+1}{t} p^t (1-p)^{n+1-t} =$$

נוסיף ונחסר את הנוסכם המתאים ל- $t = 0$ על מנת לקבל טור של התפלגות בינומית:

$$\frac{1}{p(n+1)} \left[\underbrace{\sum_{t=0}^{n+1} \binom{n+1}{t} p^t (1-p)^{n+1-t}}_{=1} - \binom{n+1}{0} p^0 (1-p)^{n+1} \right] = \frac{1}{p(n+1)} [1 - (1-p)^{n+1}]$$

מכאן ההמשך פשוט. ראו במחברת.

תשובה 3:

$$.X_i \sim \text{Bin}\left(n, \frac{D_i}{N}\right) \quad \text{א.}$$

ב.

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) =$$

$$\binom{n}{x_1} \binom{n-x_1}{x_2} \left(\frac{D_1}{N}\right)^{x_1} \left(\frac{D_2}{N}\right)^{x_2} \left(1 - \frac{D_1+D_2}{N}\right)^{n-x_1-x_2}$$

ג. מאחר ומדובר בהוצאה עם החזרה המאורעות הם בלתי תלויים. מאחר שיתכן ששני המאורעות יתרחשו יחדיו, הם אינם זרים.

$$.X_i + X_j \sim \text{Bin}\left(n, \frac{D_i+D_j}{N}\right) \quad \text{ד.}$$

$$P(X_i = x_i | X_i + X_j = m) = \frac{P(X_i=x_i, X_j=m-x_i)}{P(X_i+X_j=m)}$$

$$= \frac{\binom{n}{x_i} \binom{n-x_i}{m-x_i} \left(\frac{D_i}{N}\right)^{x_i} \left(\frac{D_j}{N}\right)^{m-x_i} \left(1 - \frac{D_i+D_j}{N}\right)^{n-m}}{\binom{n}{m} \left(\frac{D_i+D_j}{N}\right)^m \left(1 - \frac{D_i+D_j}{N}\right)^{n-m}} =$$

$$\binom{m}{x_i} \left(\frac{D_i}{D_i+D_j}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{D_i}{D_i+D_j}\right)^{m-x_i}$$

לכן

$$X_i | X_i + X_j = m \sim \text{Bin}\left(m, \frac{D_i}{D_i + D_j}\right)$$

תשובה 4:

נסמן X – מספר הגרביים שהוצאו.

ההסתברות ש $X = 2$ היא ההסתברות ששתי הגרביים הראשונות מהוות זוג: $P(X = 2) = \frac{2n}{2n} \cdot \frac{1}{2n-1}$

ההסתברות ש $X = 3$ היא ההסתברות ששתי הגרביים הראשונות אינן זוג, אבל השלישית היא בת-זוג של

אחת משתי הראשונות: $P(X = 2) = \frac{2n}{2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2}{2n-2}$

$$P(X = 3) = \frac{2n}{2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-2} \cdot \frac{3}{2n-3}$$

$$P(X = k) = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots(2n-2(k-1))(k-1)}{(2n)!} \quad \text{ובאופן דומה:}$$
$$\frac{(2n-k)!}{(2n-k)!}$$

דרך אלטרנטיבית:

נבחר מרחב מדגם שבו מתבוננים בהוצאת $k-1$ הגרביים הראשונות, ואח"כ את הגרב ה- k .

$$\binom{2n}{k-1} (2n - (k-1))$$

בשביל שבפעם ה- k נשלים זוג, צריך ש $k-1$ הגרביים הראשונות יגיעו כל-אחת מזוג אחר. נבחר את

הזוגות: $\binom{n}{k-1}$ ואחר כך מכל זוג נבחר נציג: $2^{(k-1)}$ אפשרויות. בשלב האחרון נבחר בת-זוג לאחת מ- $k-1$

$k-1$ הגרביים שהוצאנו – $(k-1)$ אפשרויות.

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k-1} 2^{(k-1)} (k-1)}{\binom{2n}{k-1} (2n - (k-1))}$$

תשובה 5:

פתרון. השאלה אמנם אינה דורשת זאת במפורש, אבל תמיד נוה להצטייד בכמה משחנים מקריים מוגדרים כראוי. נסמן ב- X את מספר הזריקות של חץ עד לקליעה הראשונה, וב- Y את מספר הזריקות של יואב עד לקליעה הראשונה. מכיון שמדובר בסדרת ניסיונות בלתי תלויים, $X \sim G(\alpha)$ ו- $Y \sim G(\beta)$.

בסעיף (א) שואלים מה ההסתברות לכך שעתי הנקודות הראשונות חושגה ברצף. כלומר, לאחר סדרת כשלונות (של שני העחקים, לסירוגין), אחד מהם קולע, ואחריו קולע מיד העחקן השני. מכיון שחץ הוא הקולע ראשון, המאורע המבוקש הוא $\{X = Y\} \cup \{X = Y + 1\}$ פירושו שחץ קלע ראשון ומיד אחריו יואב, ו- $X = Y + 1$ פירושו שיואב קלע ראשון ומיד אחריו חץ. המאורע $X = Y + 1$ זרים (לא יחכן ש- $X = Y = Y + 1$), ולכן ההסתברות היא

$$P(X = Y) + P(X = Y + 1).$$

$$\begin{aligned} P(X = Y + a) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = Y + a | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n + a | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n + a) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^{n+a-1} \beta(1 - \beta)^{n-1} \\ &= \alpha\beta(1 - \alpha)^a \sum_{n=1}^{\infty} ((1 - \alpha)(1 - \beta))^{n-1} \\ &= \frac{\alpha\beta(1 - \alpha)^a}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \\ &= \frac{\alpha\beta(1 - \alpha)^a}{\alpha + \beta - \alpha\beta}. \end{aligned}$$

(שימו לב, במעבר השלישי, לשימוש בכך ש- X, Y בלתי תלויים.)
מחישוב זה יוצא ש-

$$P(X = Y) + P(X = Y + 1) = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} + \frac{\alpha\beta(1 - \alpha)}{\alpha + \beta - \alpha\beta} = \frac{\alpha\beta(2 - \alpha)}{\alpha + \beta - \alpha\beta}.$$

אגב, אם $\beta = \alpha$, החישוב נותן $P(X = Y) + P(X = Y + 1) = \alpha$. נסו להסביר עובדה זו באופן ישיר. הערה נוספת: חישובים כאלה קל בהרבה לבצע באותיות מאשר במספרים; אפשר ורצוי להציב את הערכים של α ו- β ברגע האחרון.)

לסעיף (ב), נסמן ב- W את מספר הנקודות שקולע יואב עד לקליעה הראשונה של חץ. ההתפלגות של W די מסובכת, ולכן אינו רוצים לחשב את התוחלת והשונות שלה ישירות. לעומת זאת, אם X ידוע, אז W הוא מספר הקליעות ב- $X - 1$ נסיונות, ולכן $W|X \sim \text{Bin}(X - 1, \beta)$. מכאן מתקבל מיד עד- $E(W|X) = \beta(X - 1)$ וש- $V(W|X) = \beta(1 - \beta)(X - 1)$. [אי-אפשר לענות לשאלה ב-התוחלת היא βn כאשר n הוא מספר הריקות עד לקליעה של חץ. החשובה צריכה להיות פונקציה של α ו- β , ללא משתנים שערכם אינו ידוע, וללא רשימות (אינסופיות) של אפשרויות.] לפי חוק התוחלת החוזרת (שהוא וריאציה על נוסחת ההסתברות העלמה).

$$E(W) = E(E(W|X)) = E(\beta(X - 1)) = \beta(E(X) - 1) = \beta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = \frac{\beta(1 - \alpha)}{\alpha}.$$